Institute for Research in Fundamental Sciences

مقاله نامه ی بیست و ششمین کنفرانس بهاره فیزیک- ۲۲-۲۳ خرداد ماه ۱۳۹۸
شماره(۲۳)

بحرانیت کلاسیکی معیاری برای نظم توپولوژیک کوانتومی

زارعی، محمد حسین ؛ منتخب، افشین[1]

[1] گروه فیزیک، دانشگاه شیراز، شیراز

چکیده

در این مقاله، ما یک تناظر دوگان و با اهمیت بین نظم توپولوژیک در سیستم های کوانتومی و بحرانیت در سیستم های اسپینی و فرومغناطیس کلاسیکی معرفی می کنیم و نشان می دهیم که چگونه چنین تناظری منجر به یک روش کلاسیکی و سرراست برای شناسایی نظم توپولوژیک در یک دسته مهم از حالت های کوانتومی به نام مخفف CSS خواهد شد. به این منظور، یک هامیلتونی کوانتومی خاص تعریف می کنیم که می تواند گذار فازی کوانتومی از یک حالت منظم مغناطیده شده به یک حالت CSS را فراهم کند. ما فیدلیتی در حالت پایه چنین مدلی را به منظور مشاهده تکینگی به عنوان نشانه ای از یک گذار فاز توپولوژیکی، بررسی خواهیم کرد. نشان می دهیم که فیدلیتی چنین مدل کوانتومی به ظرفیت گرمایی یک مدل کلاسیکی دوگان مربوط می شود. به این ترتیب استدلال می کنیم که اگر در یک مدل فرومغناطیس کلاسیکی گذار فاز بحرانی داشته باشیم، در دوگان کوانتومی آن نظم توپولوژیکی وجود خواهد داشت. این روشی جدید برای بررسی وجود نظم توپولوژیکی در سیستم های کوانتومی خواهد بود.

Classical criticality establishes quantum topological order

Mohammad Hossein Zarei, Afshin Montakhab [1]

[1] *Physics Department, Shiraz University, Shiraz,*

Abstract

We establish an important duality correspondence between topological order in quantum many-body systems and criticality in ferromagnetic classical spin systems. We show how such a correspondence leads to a classical and simple characterization of topological order in an important set of quantum entangled states, namely the Calderbank-Shor-Steane (CSS) states. To this end, we introduce a particular quantum Hamiltonian which allows us to consider the existence of a topological phase transition from quantum CSS states to a magnetized state. We study the ground state fidelity in order to find non-analyticity in the wave function as a signature of a topological phase transition. Since hypergraphs can be used to map *any* arbitrary CSS state to a classical spin model, we show that fidelity of the quantum model is mapped to the heat capacity of a dual classical spin model. Consequently, we show that a ferromagnetic-paramagnetic phase transition in a classical model is mapped to a topological phase transition in the corresponding quantum model. We also show that magnetization does not behave as a local order parameter at the transition point further indicating the non-local nature of the transition. Our procedure not only opens the door for identification of topological phases via the existence of classical critical point, but also offers the potential to classify various topological phases through the concept of universality in phase transitions.

PACS No. 3.67.-a, 03.65.Vf, 75.10.Hk, 68.35.Rh

مقدمه

یک قرن بعد از تولد نظریه کوانتومی و سپس ظهور نظریه اطلاعات کوانتومی، تحقق یک رایانه کوانتومی جهانشمول به یکی از مهمترین چالش ها به ویژه از نظر تجربی تبدیل شده است[1] . در این میان، تهیه حافظه های کوانتومی ایمن از خطا که بتوانند در برابر اثرات وادوسی مقاوم باشند، جایگاه ویژه ای دارند[2]. یکی از مهمترین پیشنهادات در این زمینه ذخیره اطلاعات در سیستم های کوانتومی توپولوژیکی است [3,4,5]. چنین کاربرد هایی، منجر به اهمیت

شناسایی و طبقه بندی حالت های کوانتومی توپولوژیک شده است. علاوه بر این، شناسایی و دسته بندی حالت های توپولوژیکی در فیزیک ماده چگال نیز مساله ای مهم است. به ویژه آنکه به دلیل نظم غیر موضعی چنین حالت هایی، شناسایی آن ها به کمک پارامتر های نظم موضعی غیر ممکن است[6,7].

از طرف دیگر، اخیرا تناظر هایی بین حالت های کوانتومی و مدل های اسپینی ارائه شده اند[8,9,10]، که کاربردهای جالبی در هر دو حوزه مکانیک آماری و نظریه اطلاعات کوانتومی دارند[11,12]. با این وجود، مساله وجود گذار فاز در سیستم های اسپینی و ارتباط آن با حالت های کوانتومی متناظر کمتر مورد توجه قرار گرفته است. در این مقاله ما به بررسی این موضوع خواهیم پرداخت و به ویژه نشان می دهیم که وجود گذار فاز فرومغناطیس کلاسیک در یک مدل اسپینی ارتباط مستقیمی با وجود نظم توپولوژیکی در حالت کوانتومی متناظر با آن دارد.

به این منظور ابتدا یک مدل کوانتومی معرفی می کنیم که می تواند شرایط گذار فاز از یک حالت کوانتومی CSS را به یک حالت مغناطیده فراهم کند. حالت پایه چنین مدلی را به شکل دقیق خواهیم یافت و با بررسی آن نشان می دهیم که امکان وجود یک گذار فاز کوانتومی بر اساس مکانیسم شکست تقارن وجود ندارد. بنابراین مدل ما تنها می تواند یک گذار فاز توپولوژیکی داشته باشد. سپس فیدلیتی در حالت پایه را به منظور یافتن یک تکینگی به عنوان نشانه ای از گذار فاز توپولوژیکی مطالعه می کنیم. نشان می دهیم که فیدلیتی در حالت پایه مدل کوانتومی به ظرفیت گرمایی یک مدل اسپینی کلاسیکی مربوط می شود. بنابراین، نتیجه می گیریم که اگر یک مدل کلاسیکی دارای گذار فاز فرومغناطیسی بوده و در نتیجه در ظرفیت گرمایی آن تکینگی وجود داشته باشد، آنگاه مدل کوانتومی متناظر با آن یک گذار فاز توپولوژیکی خواهد داشت. این بدان معنی است که حالت کوانتومی CSS متناظر با یک مدل کلاسیکی گذار فاز دار، دارای نظم توپولوژیکی خواهد بود. بنابراین برای شناسایی نظم توپولوژیک در چنین حالت هایی کافی است که وجود گذار فاز در مدل کلاسیکی متناظر با آن را بررسی کنیم.

مدل کوانتومی CSSM:

حالت های کوانتومی CSS، زیرمجموعه حالت های کوانتومی تثبیت شده هستند. حالت های کوانتومی تثبیت شده در حقیقت ویژه حالت مشترک یک مجموعه از عملگر های پائولی جابجا شونده که تثبیت گر ها نامیده می شوند هستند. در صورتی که تثبیت گر های یک حالت کوانتومی فقط شامل عملگر های پائولی از نوع X (یک ضرب ماتریسی از از عملگر های پائولی X) و عملگر های پائولی از نوع Z (یک ضرب ماتریسی از عملگر های پائولی Z) باشند، آن حالت را یک حالت کوانتومی CSS می نامند. عملگر های تثبیت گر مربوط به یک حالت CSS را به صورت نمادین به شکل زیر نمایش می دهیم.

$$A_e=\prod_{i\in e} X_i \ \ ,\ \ B_m=\prod_{i\in m} Z_i \qquad (1)$$

که منظور از e , m در اینجا مجموعه خاصی از کیوبیت ها هستند. حالت تثبیت شده توسط این عملگر ها را می توان به شکل بهنجار نشده زیر نوشت:

$$|CSS\rangle=\prod_e (1+A_e)|00\ldots0\rangle \qquad (2)$$

که در اینجا منظور از $|0\rangle$ ویژه حالت عملگر پائولی Z با ویژه مقدار1+ است. واضح است که این حالت همچنین می تواند به عنوان حالت پایه یک هامیلتونی به صورت زیر تعریف شود:

$$h=-\sum_e A_e-\sum_m B_m \qquad (3)$$

به این ترتیب، مدل کوانتومی CSSM را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$H=-\sum_e A_e-\sum_m B_m+\sum_{\mathrm{m}} U_m \qquad (4)$$

که $U_m=e^{-\beta\sum_{i\in m} Z_i}$ یک عملگر ضربی است که به عنوان اختلال وارد شده و β پارامتر تنظیم است که با تغییر آن از مقدار 0 تا بینهایت، حالت پایه سیستم از یک حالت CSS به یک حالت کاملا مغناطیده $|00\ldots0\rangle$ گذار انجام می دهد.

ابتدا حالت پایه این هامیلتونی را به عنوان تابعی از β می یابیم. به این منظور عملگر $Q_m=(U_m-B_m)$ را در نظر میگیریم و نشان می دهیم که عملگری مثبت است. از این نکته شروع می کنیم که Q_m^2 عملگری مثبت است و بنابراین مقدار چشمداشتی آن به ازای هر حالتی مثبت خواهد بود. از طرف دیگر با توجه به فرم

عملگر Q_m به سادگی می توان نشان داد که $Q_m^2 = 2Q_m \cosh 2\beta$ و بنابراین از اینکه $0 \le \langle Q_m^2 \rangle$ نتیجه می شود که $0 \le \langle Q_m \rangle$. به این ترتیب عملگر Q_m مثبت بوده و کمترین ویژه مقدار آن می تواند صفر باشد.

از طرف دیگر واضح است که رابطه $[Q_m, B_m] = 0$ نیز بر قرار است و در نتیجه ویژه حالت با ویژه مقدار صفر برای Q_m حالت پایه هامیلتونی (4) خواهد بود. بنابراین کافی است که این ویژه حالت را بیابیم. در ادامه ما ادعا می کنیم که حالت کوانتومی زیر حالت پایه (4) خواهد بود:

$$|G(\beta)\rangle = \frac{1}{\sqrt{Z(\beta)}} e^{+\frac{\beta}{2}\sum_i Z_i} |CSS\rangle \qquad (5)$$

که $Z(\beta)$ در اینجا ضریب بهنجارش است. به منظور اثبات این مطلب، توجه کنید که از یک طرف با توجه به رابطه پادجابجایی بین عملگر های پائولی X و Z رابطه $A_m e^{+\frac{\beta}{2}\sum_i Z_i} = e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i\in m} Z_i + \frac{\beta}{2}\sum_{i\notin m} Z_i} A_m$ را خواهیم داشت که با توجه به آن نتیجه خواهد شد که:

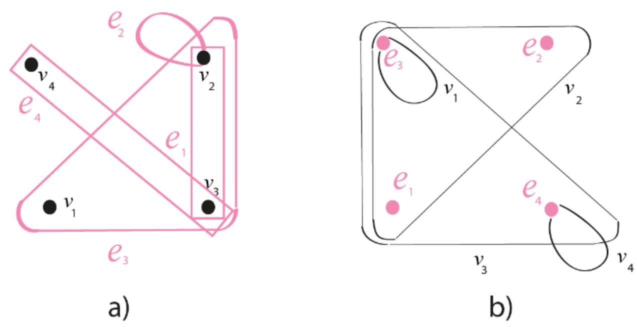
$$A_m|G(\beta)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i\in m} Z_i + \frac{\beta}{2}\sum_{i\notin m} Z_i}|CSS\rangle \qquad (6)$$

و از طرف دیگر برای عملگر Q_m نیز به سادگی قابل اثبات است که $Q_m|G(\beta)\rangle = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\frac{\beta}{2}\sum_{i\in m} Z_i + \frac{\beta}{2}\sum_{i\notin m} Z_i}|CSS\rangle$. بنابراین واضح است که $(Q_m - A_m)|G(\beta)\rangle = 0$ و حالت $|G(\beta)\rangle$ حالت پایه هامیلتونی (4) خواهد بود.

در حالت پایه بدست آمده در (5) یک ضریب بهنجارش وجود دارد که باید آنرا تعیین کنیم. با اعمال شرط بهنجارش خواهیم داشت:

$$Z(\beta) = \langle CSS| e^{\beta\sum_i Z_i}|CSS\rangle \qquad (7)$$

به طرز جالبی این رابطه شکل بسیار آشنایی دارد که در [10] برای تابع پارش یک مدل اسپینی فرومغناطیس کلاسیکی با ثابت جفت شدگی $J = 1$ ارائه شده است. و بر این اساس نتیجه می گیریم که ثابت بهنجارش مدل کوانتومی ما معادل با تابع پارش یک مدل اسپینی که دوگان حالت CSS است می باشد به طوریکه دمای T در مدل کلاسیکی به پارامتر $\frac{1}{\beta}$ در مدل کوانتومی نگاشته می شود، شکل (1) مثالی از چنین تناظری را بر اساس هایپرگراف ها نشان می دهد.



شکل 1- a) یک مدل کلاسیکی روی هایپرگراف با برهمکنش ها بین اسپین های احاطه شده توسط منحنی های بسته. b) هایپرگراف دوگان که هر منحنی بسته معرف عملگر های نوع X حالت CSS متناظر است.

با در اختیار دا شتن حالت پایه دقیق سیستم، می توانیم به برر سی وجود گذار فاز کوانتومی بپردازیم. در اولین قدم به این نکته توجه می کنیم که یک گذار فاز کوانتومی می تواند ناشی از یک شکست تقارن در حالت پایه سیستم باشد. بنابراین اگر چنین گذار فازی رخ دهد باید در حالت پایه علائم شکست تقارن وجود دا شته با شد. بنابراین ابتدا حالت پایه را در پارامتر تنظیم بینهایت در نظر می گیریم که به سادگی می توان نشان داد که حالت کاملا مغناطیده $|00\ldots0\rangle$ ا ست و وا ضح است که هر ضرب تانسوری از عملگر های پائولی Z تقارن این حالت خواهد بود. از طرف دیگر با توجه به فرم دقیق حالت پایه بر حسب حالت $|CSS\rangle$ مشخص ا ست که در مقادیر پارامتر تنظیم محدود تنها عملگر های از نوع Z که از تثبیت گر های B_m باشند تقارن هامیلتونی خواهند بود و به ازای تمامی مقادیر پارامتر تنظیم نیز همین ها تقارن خواهند ماند. در نتیجه یک گذار فاز از نوع شکست تقارنی فقط در β ی نامحدود امکان وقوع دارد و در یک پارامتر تنظیم محدود فقط گذار فازی با یک ماهیت حفظ کننده تقارن می تواند رخ دهد و آن چیزی جز یک گذار فاز توپولوژیکی نمی تواند باشد.

برای برر سی امکان وجود گذار فاز توپولوژیکی به برر سی فیدلیتی در حالت پایه برای مدل خواهیم پرداخت. در صورت وجود یک گذار فاز توپولوژیکی باید یک تکینگی در چنین فیدلیتی مشاهده شد. فیدلیتی حالت پایه طبق تعریف معادل با ضرب داخلی حالت پایه به ازای پارامتر تنظیم β و حالت پایه به ازای $\beta + \delta\beta$ است، یا به عبارت دیگر : $F = \langle G(\beta)|G(\beta+\delta\beta)\rangle$. با جایگذاری از رابطه (5)، فیدلیتی به فرم زیر بدست خواهد آمد:

$$F=\frac{\langle CSS\left|e^{\left(\beta+\frac{\delta\beta}{2}\right)\sum_i Z_i}\right|CSS\rangle}{\sqrt{Z(\beta)Z(\beta+\delta\beta)}}\qquad(8)$$

از آنجا که صورت کسر مجددا به تابع پارش مدل کلاسیکی مربوط می شود، خواهیم داشت:

$$F=\frac{Z(\beta+\frac{\delta\beta}{2})}{\sqrt{Z(\beta)Z(\beta+\delta\beta)}}\qquad(9)$$

در قدم بعدی از آنجایی که $\delta\beta$ پارامتر بسیار کوچکی است، می توانیم تابع پارش را حول مقدار β و بر حسب توان های $\delta\beta$ بسط دهیم. با انجام این کار تا مرتبه دوم به نتیجه بسیار مهم زیر خواهیم رسید:

$$F=1-\frac{C_v}{8\beta^2}\delta\beta^2\qquad(10)$$

که C_v ظرفیت گرمایی مدل کلاسیکی دوگان است. از طرف دیگر، می دانیم که برای مدل فرومغناطیسی که دارای یک گذار فاز بحرانی با شد، ظرفیت گرمایی دارای یک تکینگی در نقطه گذار فاز خواهد بود. بنابراین نتیجه می گیریم که اگر در مدل کلاسیکی گذار فاز وجود داشته باشد در مدل کوانتومی دوگان، یک تکینگی در فیدلیتی حالت پایه وجود خواهد داشت که علامت وقوع یک گذار فاز توپولوژیکی است. نهایتا اینکه وقوع گذار فاز توپولوژیکی در مدل کوانتومی به این معنا خواهد بود که حالت CSS مربوطه دارای نظم توپولوژیک است و در نتیجه حالت های CSS ای که دوگان کلاسیکی آن ها گذار فاز بحرانی نشان دهند، نظم توپولوژیک خواهند داشت.

بررسی رفتار مغناطش به عنوان پارامتر نظم:

در ادامه به عنوان شاهدی دیگر بر توپولوژیک بودن نوع گذار فاز کوانتومی، مغناطش $m=\langle G(\beta|\frac{1}{N}\sum_i Z_i|G(\beta)\rangle$ را برای این مدل بررسی می کنیم.

با جایگذاری حالت پایه از رابطه (5)، خواهیم داشت:

$$m=\frac{1}{NZ(\beta)}\langle CSS\left|e^{\beta\sum_i Z_i}\sum_i Z_i\right|CSS\rangle\qquad(11)$$

سپس با جایگذاری $\sum_i Z_i$ در این رابطه با مشتق نسبت به β و همچنین جایگذاری مجدد صورت کسر با تابع پارش، این رابطه به فرم زیر تبدیل می شود:

$$m=\frac{1}{N}\frac{\partial LnZ}{\partial\beta}\qquad(12)$$

که این عبارت معادل با منهای انرژی درونی مدل اسپینی کلاسیکی است. به این ترتیب مغناطش مدل کوانتومی به انرژی درونی مدل کلاسیکی متناظر می شود. از طرف دیگر، این کاملا شناخته شده است که در یک گذار فاز کلاسیکی انرژی درونی رفتاری مانند یک پارامتر نظم ندارد بلکه مقدار آن به صورت تدریجی تغییر می کند. بنابراین، مغناطش مدل کوانتومی نیز نمی تواند یک پارامتر نظم برای مدل کوانتومی باشد. این مطلب در واقع تاییدی دیگر بر ماهیت توپولوژیک گذار فاز است.

نتیجه گیری

در این مقاله به کمک مربوط کردن یک گذار فاز کوانتومی به یک گذار فاز کلاسیکی، تناظری بسیار مهم بین گذار فاز بحرانی در مدل های اسپینی کلاسیکی و نظم توپولوژیک در سیستم های کوانتومی معرفی کردیم. این مساله موجب خواهد شد که بررسی توپولوژیک بودن یک سیستم کوانتومی CSS به مساله وجود یک گذار فاز بحرانی در مدل کلاسیکی متناظر تقلیل یابد که روشی جدید برای شناسایی نظم توپولوژیک خواهد بود.

مرجع ها

[1] J. P. Dowling, G. J. Milburn, ``Quantum technology: the second quantum revolution," Philosophical Transactions of the Royal Society of London A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences 361.1809 (2003): 1655-1674
[2] A. R. Calderbank and P. W. Shor, Phys. Rev. A, 54, 1098-1105 (1996)
[3] D. Nigg, M. Muller, E. A. Martinez, P. Schindler, M. Hennrich, T. Monz, M. A. Martin-Delgado, R. Blatt, Science 345.6194 (2014): 302-305
[4] H. Bombin, M. A. Martin-Delgado, Phys. Rev. Lett. 97, 180501 (2006).
[5] A. Y. Kitaev, Ann. Phys. (N.Y.) 303, 2 (2003).
[6] X.-G. Wen, Int. J. Mod. Phys. B 5, 1641 (1991).
[7] X.-G Chen, G. Zheng-Cheng, and X.-G. Wen, Phys. Rev. B 82.15 (2010): 155138.
[8] C. Castelnovo, C. Chamon, C. Mudry, P. Pujol ,Ann. Phys. 318(2), 316-344 (2005)
[9] M. Van den Nest, W. Dur, H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. 98, 117207 (2007).
[10] M. H. Zarei, A. Montakhab, Phys. Rev. A 98, 012337 (2018).
[11] M. Van den Nest, W. Dur, H. J. Briegel, Phys. Rev. Lett. 100, 110501 (2008).
[12] M. H. Zarei, A. Montakhab, arXiv:1902.06100 (2019)