

تداخل مودهای فشرده

فرانک آذرنوش^۱، مهدیه وطن پرست^۱

^۱گروه فیزیک دانشگاه پیام نور، ص.ب. ۳۶۹۷-۱۹۳۹۵، تهران ایران

چکیده

حالت های فشرده فوتونی درهم تنیده یکی از منابع مهم برای استفاده در تکنولوژی های کوانتومی است. در این مقاله با ارائه سه طرح، حالت های فشرده درهم تنیده را با استفاده از تداخل حالت های تک مود و دو مود فشرده خلا تولید می کنیم. دو طرح اول منجر به حالت های دوکیوتریتی درهم تنیده می گردد و حالت سوم یک حالت درهم تنیده چهارکیوتریتی تولید می کند. نتیجه می گیریم که اگر حالت های فشرده قبل از تداخل درهم تنیده باشند باعث تقویت درهم تنیدگی می شود و اگر درهم تنیده نباشند باعث تولید درهم تنیدگی می گردد.

واژه های کلیدی - درهم تنیدگی، حالت فشرده خلا تک مود، حالت فشرده خلا دو مود، کیوتریت، تداخل

مقدمه

در اپتیک کوانتومی، حالت های فشرده نوری بسیار مورد مطالعه قرار گرفته اند. حالت های فشرده با توجه به نوع ساختار بلور غیر خطی به دو بخش تقسیم می گردد. حالت فشرده تک مود که با ارسال یک نور به یک بلور غیر خطی با ساختار تبهگن تولید می شود و حالت فشرده خلا دو مود که با استفاده از بلور غیر خطی با ساختار غیر تبهگن خلق می گردد. فرآیندی که به تولید حالت فشرده منتج می شود فرآیند تبدیل کاهنده خودبه خودی نامیده می شود. [۱] در این مقاله در بخش اول حالت فشرده خلا تک مودی و دو مودی مورد بررسی می گردد. در بخش دوم سه طرح برای تداخل مودهای فشرده ارائه می کنیم و در بخش سوم با معرفی سنجه پارامتر تلاقی تعمیم یافته برای سنجیدن درهم تنیدگی، میزان این پارامتر را برای حالت های ارائه شده محاسبه می کنیم. در بخش آخر درباره درهم تنیدگی این حالت های بحث و نتیجه گیری می کنیم. هدف از این طرح ها بررسی تغییرات درهم تنیدگی حالت های فشرده بعد از تداخل و عوامل موثر در آن است.

حالت های فشرده تک مود و دو مود خلا

همانگونه که در بخش قبل اشاره شد، حالت های فشرده خلا بسته به نوع ساختار بلور به دو بخش تک مود و دو مود تقسیم می شود.

عملگر حالت تک مود فشرده خلا $S(r) = \exp[r(a^{\dagger} + a)]$ است که وقتی بر روی حالت خلا اعمال می شود [۱]

$$S_1(r)|0\rangle = \frac{1}{\sqrt{\cosh[r]}} \sum_{n=0}^{\infty} (-\tanh[r])^n \frac{\sqrt{(2n)!}}{n!2^n} |2n\rangle \quad (1)$$

عملگر حالت دو مود فشرده خلا برابر $S(r) = \exp[r(a^{\dagger}b^{\dagger} + ab)]$ است و حاصل اعمال آن بر دو مود خلا برابر با [۱]

$$S(r)|0,0\rangle = \frac{1}{\cosh[r]} \sum_{n=0}^{\infty} (\tanh[r])^n |n,n\rangle \quad (2)$$

می شود. در هر دو عملگر r پارامتر فشرده گی و a, b عملگرهای فنا برای فوتون می باشند.

طرح ها

در این بخش سه طرح برای تداخل مودهای فشرده ارائه می دهیم، اما قبل از آن باید عملگر باریکه شکن و حالت های خروجی از باریکه شکن را توضیح دهیم. عملگر باریکه شکن با دو ورودی متقارن به صورت زیر است [۲]

$$B = \exp[a^{\dagger}b - b^{\dagger}a] \quad (3)$$

وقتی که این عملگر بر دو مود وروی با پایه های فوک اعمال می شوند حاصل برابر [۲]

$$\hat{B} |n, n\rangle = \frac{1}{n!} \sum_{k_1}^n \sum_{k_2}^n \binom{n}{k_1} \binom{n}{k_2} \times \left(-\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{k_2} \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{k_1} \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{n-k_1} \left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right)^{n-k_2} \times \sqrt{(k_1 + k_2)! (2n - k_1 - k_2)!}$$

$$\times |k_1 + k_2, 2n - k_1 - k_2\rangle \quad (4)$$

است. حال به بررسی طرح ها می پردازیم. طرح اول (شکل ۱-الف) تداخل دو مود فشرده تک مود با پارامترهای فشردهگی r_1, r_2 را نشان می دهد. برای این تداخل، حالت خروجی به صورت زیر بدست می آید [۳]

$$|\psi\rangle = B S = B \exp[r(a^{\dagger 2} - a^2 - b^{\dagger 2} + b^2)] B^{\dagger} |0\rangle_A |0\rangle_B = \exp[r(a^{\dagger} b^{\dagger} + ab)] |0\rangle_A |0\rangle_B \quad (5)$$

این عملگر برابر با عملگر دو مود فشرده خلا می باشد و در نتیجه حالت خروجی نیز همان حالت دو مود فشرده خلا است. با در نظر گرفتن $r = 0.5$ (معادله ۴.۳) دسیبل) معادله ۲ به صورت زیر است

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\cosh(r)} (|0,0\rangle + \tanh r |1,1\rangle + \tanh^2 r |2,2\rangle + \dots) \quad (6)$$

که جمله اول با احتمال ۰.۷۸، جمله دوم با احتمال ۰.۱۶ و جمله سوم با احتمال ۰.۰۳۵ است و باقی جملات با احتمالی بسیار اندک می باشند، بنابراین از آنها چشم پوشی می کنیم. این حالت، حالت نهایی طرح اول می باشد. طرح دوم (شکل ۱-ب) تداخل دو مود از حالت فشرده دو مودی خلا می باشد. مطابق شکل ۱-ب ابتدا با استفاده از فرآیند تبدیل کاهنده خودبه خودی حالت فشرده خلا دو مودی را تولید می کنیم، سپس این دو مود را با استفاده از یک باریکه شکن متقارن با یکدیگر تداخل می دهیم. با اعمال عملگر باریکه شکن بر معادله ۶ بدست می آوریم

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\cosh r} (|0,0\rangle + \tanh r \hat{B} |1,1\rangle + \tanh^2 r \hat{B} |2,2\rangle) \quad (7)$$

که برای $n=1$ حاصل $\hat{B} |1,1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |2,0\rangle - |0,2\rangle$ ، به حالت هونگ-او-مندل مشهور است و برای $n=2$ حاصل برابر $\hat{B} |2,2\rangle = \frac{\sqrt{6}}{4} |4,0\rangle + \frac{\sqrt{6}}{4} |0,4\rangle - \frac{1}{2} |2,2\rangle$ می آید. بنابراین حالت نهایی برای طرح دوم به صورت زیر بدست می آید.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\cosh r} (|0,0\rangle + \tanh r \hat{B} |1,1\rangle + \tanh^2 r \hat{B} |2,2\rangle) = \frac{1}{\cosh r} \quad (8)$$

طرح سوم (شکل ۱-ج) با استفاده تداخل دو حالت فشرده دو مودی خلا مطابق شکل، یک حالت چهار مود تنیده تولید می کنیم.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\cosh[r] \cosh[-r]} \sum_n (\tanh[r])^n (\tanh[-r])^n B(|n\rangle_a |n\rangle_c) \otimes B(|n\rangle_b |n\rangle_d) \quad (9)$$

با استفاده از معادله های ۷ و ۹ داریم

$$|\psi\rangle = |0\rangle + \tanh[r] \tanh[-r] B(|1\rangle_a |1\rangle_c) B(|1\rangle_b |1\rangle_d) + (\tanh[r] \tanh[-r])^2 B(|2\rangle_a |2\rangle_c) B(|2\rangle_b |2\rangle_d) \quad (10)$$

و در نتیجه حالت نهایی طرح سوم برابر با

$$|\psi\rangle = |0\rangle + (\tanh[r] \tanh[-r])^2 \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{6} |4,0\rangle - 2 |2,2\rangle + \sqrt{6} |0,4\rangle)_{a,c} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} (\sqrt{6} |4,0\rangle - 2 |2,2\rangle + \sqrt{6} |0,4\rangle)_{b,d} \quad (11)$$

می شود.

درهم تنیدگی

برای سنجیدن درهم تنیدگی سیستم های چند بخشی خالص از سنجه تلاقی تعمیم یافته می توان استفاده کرد. این سنجه به صورت زیر محاسبه می شود [۴]

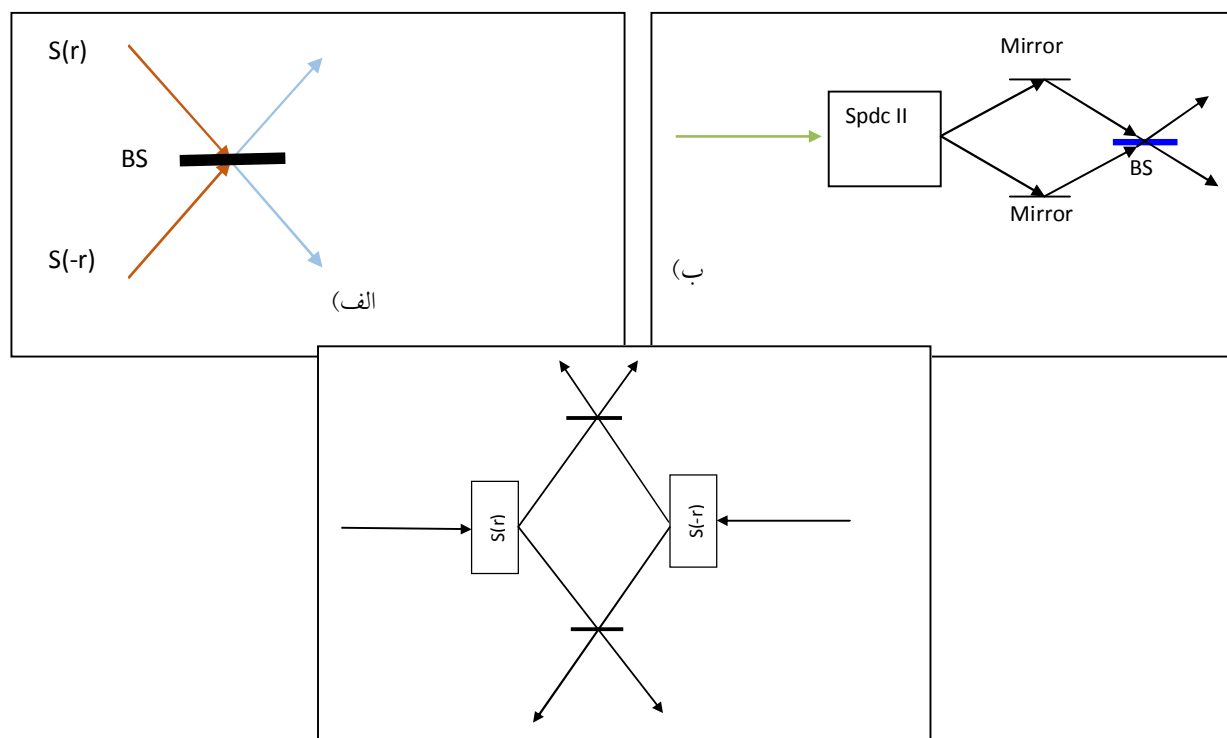
$$IC(|\psi^{AB}\rangle) = \sqrt{\frac{d}{d-1} \left(1 - \text{Tr} \left[(\text{Tr}_B(\rho))^2 \right] \right)} \quad (12)$$

که d در اینجا ابعاد سیستم می باشد. میزان بیشینه این سنجه برای حالت کاملاً درهم تنیده دو کیوتیتی برابر $\sqrt{\frac{4}{3}}$ و برای حالت جدایی پذیر برابر ۰ است. برای طرح اول و حالت نهایی تداخل دو مود فشرده تک مود، میزان سنجه تلاقی به صورت زیر بدست می آید.

$$IC_1 = \sqrt{2} \sqrt{1 - \text{Sech}[r]^\xi (\xi + \text{Tanh}[r]^\xi + \text{Tanh}[r]^\wedge)} \quad (13)$$

برای تداخل دو مود فشرده در طرح دوم، با استفاده از حالت نهایی معادله ۸ سنجه تلاقی تعمیم یافته به صورت زیر حاصل می شود

$$IC_2 = \frac{1}{\xi\sqrt{3}} \left((\xi^3 + \xi \text{Cosh}[\xi r] + \xi^2 \text{Cosh}[r] + \xi \text{Cosh}[\xi r]) \text{Sech}[r]^\wedge \text{Tanh}[r]^\wedge \right)^{1/2} \quad (14)$$



شکل ۱: الف) تداخل دو مود فشرده تک مود با فشردگی های $r, -r$ ، ب) تداخل دو مود فشرده دو موده و ج) تداخل چهار مود فشرده

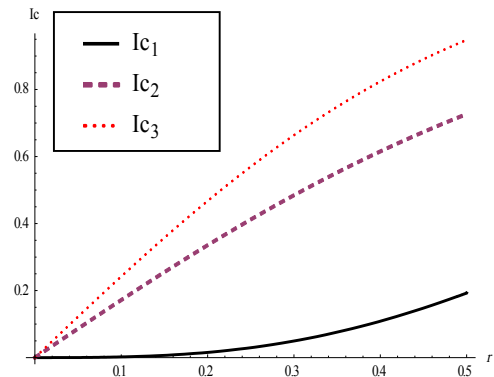
و برای سومین طرح، سنجه تلاقی تعمیم یافته برای حالت چهار کیوتیتی برابر با

$$IC_3 = \frac{1}{\xi} \left(\xi^2 - \text{Sech}[r]^\wedge (\xi^2 + \xi^2 \text{Tanh}[r]^\xi + \xi \text{Tanh}[r]^\wedge + \xi \text{Tanh}[r]^\wedge + \xi \text{Tanh}[r]^\wedge + \xi \text{Tanh}[r]^\wedge) \right)^{1/2}$$

می شود.

بحث و نتیجه گیری:

در این مقاله سه طرح برای تداخل حالت های فشرده ارائه نمودیم. با استفاده از سنج پارامتر تلاقی میزان درهم تنیدگی بعد از تداخل را محاسبه نمودیم.



شکل ۲: پارامتر تلاقی تعمیم یافته نسبت به پارامتر فشردگی برای (خط مشکی) تداخل دو مود فشرده تک مود، (خط چین) دو مود فشرده دو موده و (نقطه چین) برای چهار مود فشرده

از نمودار شکل ۲ مشاهده می گردد که درهم تنیدگی با افزایش پارامتر فشردگی افزایش می یابد. برای دو حالت دو کیوتربیتی (طرح یک و دو) مشاهده می شود که درهم تنیدگی در حالت دوم بیشتر است که کاملاً با انتظارات همخوانی دارد زیرا در طرح دوم حالت های اولیه قبل از تداخل درهم تنیده می باشند. نکته دیگر نوع افزایش نمودار است که برای طرح اول (خط سیاه) افزایش در ابتدا با شیب بسیار کم و سپس افزایش شیب دارد (رفتاری شبیه توابع گاوسی دارد) اما در طرح دوم در ابتدا شیب بسیار زیاد است و سریعاً به حالت بیشینه درهم تنیدگی نزدیک می شود. برای طرح سوم، چهار مود درهم تنیده تولید می شوند، این حالت چهارکیوتربیت درهم تنیده می باشد. در این حالت با اینکه مود هایی که با یکدیگر تداخل می کنند، پیش از تداخل درهم تنیده نیستند، (مود a با مود c تداخل می کنند که از قبل درهم تنیده نبودند و برای دو مود دیگر نیز این گونه است) در قیاس با دو طرح اول درهم تنیدگی بیشتری دارند البته این را نیز باید در نظر گرفت که به دلیل ابعاد بیشتر سیستم و کیفی بودن سنج استفاده شده، قابل قیاس با یکدیگر نیستند. در مقایسه ای دیگر با دو طرح دیگر شیب افزایش درهم تنیدگی شبیه طرح دوم است که بعد از تداخل را نشان می دهد.

مرجع ها

[۱]. A. I. Lvovsky, arXiv:1401.4118v2,

[۲]. U. Leonhardt, Measuring the Quantum State of Light, Cambridge University, ۱۹۹۰

[۳]. A. Furusawa, Quantum States of Light, SPRINGER BRIEFS IN MATHEMATICAL PHYSICS ۱۰

[۴]. S. Albererio and S.M.Fei, J.Opt.B3, ۲۲۳(۲۰۰۱).