

## محاسبه نرخ واپاشی خلا با استفاده از انتگرال مسیر در زمان حقیقی

بهراد تقوی\*، مهدیار نوربالا\*<sup>†</sup>

\* دانشکده فیزیک، دانشگاه تهران، تهران، ایران.  
<sup>†</sup> پژوهشکده نجوم، پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، تهران، ایران.

پست الکترونیکی: [mnoorbala@ut.ac.ir](mailto:mnoorbala@ut.ac.ir), [b.taghavi@ut.ac.ir](mailto:b.taghavi@ut.ac.ir)

### چکیده

پدیده تونل‌زنی در نظریه میدان‌های کوانتومی از اهمیت بالایی برخوردار است و فهم درست آن برای مطالعه پدیده‌هایی از جمله واپاشی خلا کاذب ضروری است. محاسبه نرخ تونل‌زنی (نرخ واپاشی خلا کاذب) به طور معمول با استفاده از روش کلن-کلمن (روش اینستنتن‌ها) و بر اساس محاسبه انتگرال مسیر اقلیدسی صورت می‌گیرد. با این حال، جنبه‌هایی از این محاسبات از شفافیت لازم برخوردار نیستند؛ از جمله مهم‌ترین این جنبه‌ها، لزوم و اهمیت استفاده از دوران ویک و گسترش تحلیلی در محاسبه انتگرال مسیر اقلیدسی است. ما در این مقاله با استفاده از نظریه پیکارد-لفشتر به مطالعه انتگرال‌های مسیر لورنتزی می‌پردازیم و روشی برای محاسبه مستقیم نرخ واپاشی از انتگرال مسیر لورنتزی (در زمان حقیقی) پیشنهاد می‌کنیم.

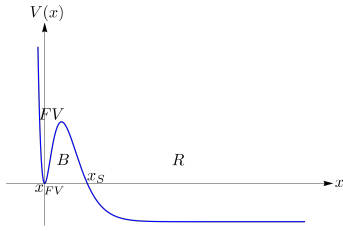
**واژگان کلیدی:** واپاشی خلا کاذب، نظریه پیکارد-لفشتر، انتگرال مسیر لورنتزی.

مطالعه پدیده‌های مهمی از جمله واپاشی خلا کاذب و تشکیل حباب در کیهان‌شناسی و یا بررسی پایداری خلا مدل استاندارد در فیزیک ذرات بنیادی نیازمند فهم درست پدیده تونل‌زنی در نظریه میدان‌های کوانتومی است. یکی از چالش‌های محاسبه نرخ تونل‌زنی به خارج از خلا شبه‌پایدار (نرخ واپاشی خلا کاذب) یافتن چارچوبی است که بتوان محاسبات را در آن به صورت ساخت‌یافته بهبود داد. در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی (در غیاب روش‌های تقریبی) همواره می‌توان این کمیت را با حل عددی معادله شرودینگر محاسبه نمود. با این حال، امکان تعمیم این روش به محاسبه نرخ واپاشی خلا در نظریه میدان‌های کوانتومی وجود ندارد. روش معمول محاسبه نرخ تونل‌زنی، که اولین بار توسط کلن و کلمن [۱] معرفی شد، بر محاسبه قسمت موهومی المان ماتریسی  $\langle FV | e^{-HT} | FV \rangle$  متمرکز است که حالت  $|FV\rangle$  در مکانیک کوانتومی نشان دهنده مکان کمینه موضعی پتانسیل،  $|x_{FV}\rangle$ ، و در نظریه میدان‌های کوانتومی نمایش دهنده پیکربندی خلا کاذب،  $|\phi_{FV}\rangle$ ، است. از آنجا که این المان ماتریسی به وضوح حقیقی است، نمی‌توان به سادگی قسمت موهومی آن را محاسبه نمود؛ بلکه، باید با گسترش تحلیلی پتانسیل، پیکربندی خلا کاذب را پایدار نمود. با این حال، به نظر می‌رسد بعضی از جزئیات این محاسبات نیازمند شفاف‌سازی بیشتر و درک عمیق‌تر باشند. برای مثال، گسترش تحلیلی برای پتانسیل‌های فیزیکی (که از پایین کراندار هستند) جواب درست را به دست نمی‌دهد؛ بلکه به نظر می‌رسد مسیر تندترین نزول عبور کننده از نقطه زینی متناظر با پیکربندی خلا کاذب نقش اساسی در محاسبه نرخ تونل‌زنی بازی می‌کند [۲].

به همین جهت، ما در این مقاله به بررسی روشی متفاوت برای محاسبه نرخ واپاشی خلا می‌پردازیم.<sup>۱</sup> در این روش، که بر اساس محاسبه احتمال بقای خلا کاذب بنا شده است، از نظریه پیکارد-لفشتر برای محاسبه انتگرال مسیر لورنتزی استفاده می‌شود. برای این منظور، ما به مطالعه و طبقه‌بندی نقاط زینی حقیقی و مختلط کنش (جواب‌های حقیقی و مختلط معادلات حرکت) در یک بازه زمانی مشخص<sup>۲</sup> و برای یک شکل پتانسیل خاص می‌پردازیم. همین‌طور، پیشنهادی را برای محاسبه نرخ تونل‌زنی بر حسب قسمت غیر اختلالی انتگرال مسیر لورنتزی روی مسیر تندترین نزول عبور کننده از نقطه زینی متناظر با پیکربندی خلا کاذب مطرح می‌کنیم. برای این منظور، در ابتدا تعریف فیزیکی از نرخ واپاشی بر حسب احتمال بقای خلا کاذب ارائه می‌دهیم. یک پتانسیل فیزیکی با ناحیه خلا کاذب و یک ناحیه مقصد بزرگ را در نظر بگیرید؛ احتمال بقای خلا کاذب را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$P_{FV} \stackrel{\text{تعریف}}{\equiv} \int_{FV} dx |\psi(x, T)|^2. \quad (1)$$

<sup>۱</sup> ما در این مقاله به منظور اجتناب از پیچیدگی، خود را به بررسی نرخ تونل‌زنی در مکانیک کوانتومی یک بعدی محدود می‌کنیم. با این حال، بیشتر مطالب مطرح شده به سادگی قابل تعمیم به نظریه میدان‌های کوانتومی خواهند بود.  
<sup>۲</sup> بازه زمانی که مفهوم نرخ واپاشی مستقل از زمان در آن خوش تعریف است.



شکل ۱. یک پتانسیل فیزیکی با ناحیه خلا کاذب و یک ناحیه مقصد بی‌نهایت.

برای یک سیستم در حال واپاشی، انتظار داریم احتمال بقا به صورت نمایی افت کند ( $P_{FV}(T) \sim e^{-\Gamma T}$ ). بنابراین، می‌توانیم نرخ واپاشی را به صورت  $\Gamma = -\frac{1}{P_{FV}} \frac{d}{dT} P_{FV}$  تعریف کنیم. با این حال، توجه کنید که  $P_{FV}(T) \sim e^{-\Gamma T}$  در تمامی زمان‌ها برقرار نیست و در نتیجه  $\Gamma$  وابسته به زمان است. برای یک سیستم کوانتومی یک بعدی می‌توان  $P_{FV}$  را با حل عددی معادله شرودینگر محاسبه نمود. در این صورت مشاهده می‌کنیم که احتمال بقا در ابتدا و تا زمان مشخصه  $T_{slosh}$  رفتار نوسانی داشته، پس از آن به صورت نمایی افت کرده و در نهایت و در زمان مشخصه  $T_{NL}$  رفتار آن غیر خطی می‌شود. این تصویر مشخص می‌نماید که منظور ما از یک نرخ واپاشی فیزیکی (مستقل از زمان) چیست؛ احتمال بقا در یک بازه زمانی به صورت نمایی افت می‌کند و درست در همین بازه زمانی است که یک نرخ واپاشی مستقل از زمان خوش‌تعریف خواهد بود. برای بدست آوردن یک نرخ واپاشی مستقل از زمان، می‌توان روی نوسانات میانگین‌گیری کرد. با این حال، برای خوش‌تعریف بودن این میانگین‌گیری، زمان  $T$  باید از زمان مشخصه این نوسانات،  $T_{slosh}$ ، بسیار بزرگ‌تر بوده و از زمان مشخصه رفتارهای غیر خطی،  $T_{NL}$ ، بسیار کوچک‌تر باشد. بنابراین

$$\Gamma \equiv \lim_{\substack{T/T_{NL} \rightarrow 0 \\ T/T_{slosh} \rightarrow \infty}} \frac{d}{dT} \ln P_{FV}(T). \quad (2)$$

حال، با در دست داشتن تعریف نرخ واپاشی، و توجه به خوش‌تعریف بودن این مفهوم در رژیم زمانی  $T_{slosh} \ll T \ll T_{NL}$ ، به بررسی انتگرال مسیر لورنتزی در این رژیم زمانی می‌پردازیم. برای این کار از نظریه پیکارد-لفشتر استفاده می‌کنیم [۳-۵]. برای درک این روش، انتگرال ساده زیر را در نظر بگیرید

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{\frac{i}{\lambda} f(x)}. \quad (3)$$

که تابع  $f$  یک تابع تحلیلی است. اگر نقاط زینی تابع  $f$ ،  $\{z_i\}$ ، منزوی و غیر تهیگن باشند و مسیرهای تندترین نزول و تندترین صعود عبور کننده از این نقاط زینی را به ترتیب با  $\mathcal{J}_i$  و  $\mathcal{K}_i$  نمایش دهیم، نظریه پیکارد-لفشتر پیشنهاد می‌کند که می‌توان این انتگرال را به صورت زیر محاسبه نمود

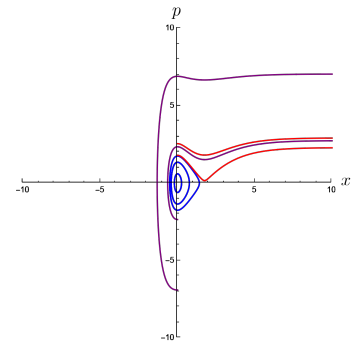
$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{\frac{i}{\lambda} f(x)} = \sum_i n_i \int_{\mathcal{J}_i} dz e^{\frac{i}{\lambda} f(z)}. \quad (4)$$

که اعداد صحیح  $\langle \mathbb{R}, \mathcal{K}_i \rangle$  تعریف  $n_i$  اعداد برخورد هستند. با تعمیم این روش به انتگرال مسیر فاینمن، درمی‌یابیم که مسئله محاسبه نرخ تونل‌زنی در زمان حقیقی به مسئله بررسی نقاط زینی انتگرال مسیر لورنتزی در زمان  $T_{slosh} \ll T \ll T_{NL}$  و انگشتانه‌های لفشتر<sup>۳</sup> (مسیرهای تندترین نزول) متناظر با آن‌ها تقلیل پیدا می‌کند. این جمله ایده اصلی

این مقاله را خلاصه می‌کند. حال، با مشخص شدن مسیر راه، به بررسی نقاط زینی کنش به ازای پتانسیل فیزیکی  $V(x) = (1+x)e^{-x}$  اشاره شده می‌پردازیم (شکل ۱ را ببینید).

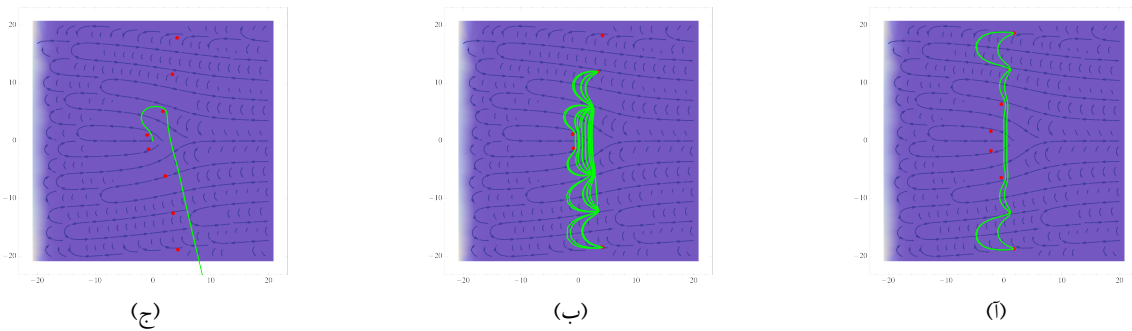
مدارهای فضای فاز به ازای تکانه‌های حقیقی برای پتانسیل ذکر شده، در شکل ۲ نمایش داده شده است. همان‌طور که در این شکل به وضوح مشخص است، مدارهای با انرژی بیشتر از انرژی سد پتانسیل بسته نخواهند بود. با توجه به حل عددی معادلات حرکت، به نظر می‌رسد این موضوع برای مسیرهای با انرژی مختلط نیز برقرار است (شکل‌های ۳(ب) و ۳(ج)). با این حال، مسیرهای با تکانه کاملاً موهومی (فارغ از اندازه تکانه) می‌توانند بسته باشند (شکل ۳(د) را ببینید).

با محاسبه دوره تناوب نقاط زینی حقیقی و موهومی، بر حسب دامنه نوسانات (برای مسیرهای حقیقی) و تکانه اولیه (برای مسیرهای موهومی)، متوجه رفتار مشخصی در حد  $T_{slosh} \ll T$  می‌شویم (شکل ۴(د) و شکل ۴(ب)). در این حد، نقاط زینی موهومی مشارکتی نداشته و تنها نقاط زینی حقیقی مهم خواهند بود. به علاوه، دامنه نقاط زینی حقیقی نزدیک به مقدار بحرانی خود است و در نتیجه انرژی این نقاط زینی تقریباً برابر با انرژی سد پتانسیل خواهد بود (شکل ۴(ج)). بنابراین، انتظار می‌رود سهم غالب در بین نقاط زینی حقیقی متعلق به جواب خلا کاذب  $x(t) = x_{FV}$  باشد.

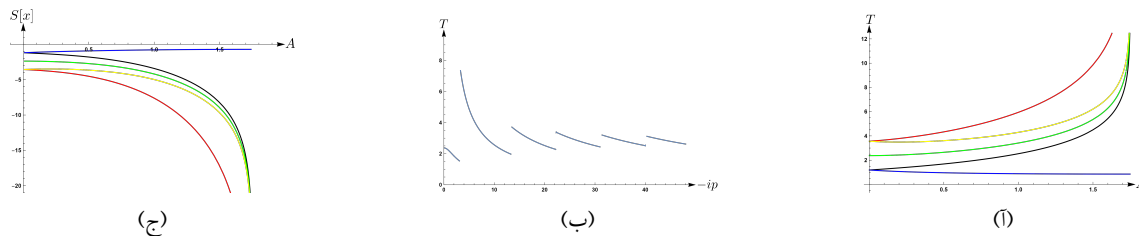


شکل ۲. فضای فاز و مدارهای انرژی ثابت برای پتانسیل با ناحیه مقصد بی‌نهایت. توجه کنید که در این حالت مدارهای با انرژی بیشتر از سد پتانسیل (خطوط قرمز با سرعت اولیه مثبت و بنفش با سرعت اولیه منفی) بسته نبوده و نمیتوانند یک نقطه زینی باشند.

<sup>3</sup>Lefschetz thimbles



شکل ۳. این شکل رفتار مسیرهای حرکت ذره در صفحه مختلط را به ازای سرعت‌های اولیه کاملاً موهومی (شکل آ) و سرعت‌های اولیه مختلط (شکل‌های ب و ج) نمایش می‌دهد. همان‌طور که در تصویر مشخص است، مسیرهای با تکانه مختلط باز بوده و مسیرهای با تکانه موهومی بسته خواهند بود.



شکل ۴. دوره تناوب برای نقاط زینی حقیقی بر حسب دامنه نوسانات (شکل آ) و برای نقاط زینی موهومی بر حسب تکانه اولیه (شکل ب). همچنین، کنش مسیرهای حقیقی بر حسب دامنه نوسانات رسم شده است (شکل ج). در شکل‌های (آ) و (ج) نقاط زینی بر حسب تعداد دفعاتی که از خلا کاذب عبور می‌کنند دسته‌بندی شده اند که با رنگ‌های متفاوت در این نمودارها نمایش داده شده است.

## نتیجه‌گیری

با توجه به محاسبات عددی انجام شده و بررسی رفتار نقاط زینی در رژیم  $T_{slosh} \ll T \ll T_{NL}$ ، حدس زیر را مطرح می‌کنیم:

گزاره ۱. نرخ تونل‌زنی برای سیستم کوانتومی که در ابتدا در ناحیه خلا کاذب جای‌گزیده شده است، با قسمت غیر اختلالی انتگرال مسیر لورنتزی روی انگشتانه لفشتر عبور کننده از نقطه زینی متناظر با مسیر حرکت کلاسیکی داده می‌شود. همچنین، نظریه پیکارد-لفشتر به ما اجازه می‌دهد تا این قسمت غیر اختلالی را با استفاده از کنش نقاط زینی مجاور<sup>۴</sup> جواب کلاسیکی محاسبه کنیم. ما به نقطه زینی مجاور با کوچک‌ترین قسمت موهومی کنش، جواب «جهش لورنتزی»<sup>۵</sup> می‌گوییم.

## سپاس‌گزاری

ما از شورای پژوهشی دانشگاه تهران به خاطر حمایت از این پروژه تشکر می‌کنیم. همچنین، ب.ت. از علیرضا بهتاش و Yuya Tanizaki به خاطر بحث‌های مفید و کمک‌هایشان تشکر می‌کنند.

## مرجع‌ها

- [1] C. G. Callan, Jr. and S. R. Coleman, "The Fate of the False Vacuum. 2. First Quantum Corrections," *Phys. Rev.* **D16** (1977) 1762-1768.
- [2] A. Andreassen, D. Farhi, W. Frost, and M. D. Schwartz, "Precision decay rate calculations in quantum field theory," *Phys. Rev.* **D95** (2017) 085011, [arXiv:1604.06090 \[hep-th\]](https://arxiv.org/abs/1604.06090).

<sup>۴</sup>نقاط زینی مجاور نقاط زینی هستند که با تغییر فاز پارامتر بسط اختلالی با نقطه زینی مورد نظر روی خط استوکس قرار بگیرند. برای انتگرال مسیر لورنتزی این نقاط زینی مختلط هستند.

<sup>۵</sup>Lorentzian bounce

- [3] E. Witten, “A New Look At The Path Integral Of Quantum Mechanics,” [arXiv:1009.6032](https://arxiv.org/abs/1009.6032) [[hep-th](#)].
- [4] M. Serone, G. Spada, and G. Villadoro, “The Power of Perturbation Theory,” *JHEP* **05** (2017) 056, [arXiv:1702.04148](https://arxiv.org/abs/1702.04148) [[hep-th](#)].
- [5] Y. Tanizaki and T. Koike, “Real-time Feynman path integral with Picard–Lefschetz theory and its applications to quantum tunneling,” *Annals Phys.* **351** (2014) 250–274, [arXiv:1406.2386](https://arxiv.org/abs/1406.2386) [[math-ph](#)].