IPM
Institute for Research in Fundamental Sciences

مقاله نامه ی بیست و ششمین کنفرانس بهاره فیزیک- ۲۲-۲۳ خرداد ماه ۱۳۹۸
شماره(۲۵)

جرم موثر وابسته به مکان و مولدهای هرمیتی-کاذب درهامیلتونی ها با تقارن -PT

فرشته سلیمانی، زهرا بخشی

گروه فیزیک، دانشگاه شاهد، تهران

چکیده:

در این مقاله ما با استفاده از معرفی دو اپراتور مرتبه اول متقابل η-هرمیتی–کاذب $(\eta-weak-pseudo-Hermiticity)$ با جرم موثر (PDM) و اعمال آن روی معادله دیراک با توابع موج اسپینوری و پتانسیل غیر هرمیتی با طیف انرژی حقیقی در چارچوب جرم موثر وابسته به مکان به یک روش کلی برای حل پتانسیل های غیر هرمیتی با تقارن PT دست خواهیم یافت . همچنین پتانسیل مدل $ScarfII$ به عنوان مثال مورد بررسی قرار خواهد گرفت .

- معادله دیراک نسبیتی برای ذره ای که در یک میدان الکترومغناطیسی خارجی $A\mu$ در حال حرکت است، در واحد اتمی $\hbar=C=1$ به صورت زیر در نظر گرفته می شود:

$$[i\gamma\mu(\partial\mu + ieA\mu) - M_{(x)}]\,\psi = 0 \qquad (1)$$

که $M(x)$ جرم وثر وابسته به مکان ذره و $\gamma_\mu(\mu=0,1,2,3)$ ماتریس های گاما با تعریف زیر می باشد:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma^i \\ \sigma^i & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

در ماتریس های بالا I ماتریس واحد $2*2$ و σi ماتریس های پائولی می باشند. در هنگام عدم حضور پتانسیل برداری و با در نظر گرفتن $\upsilon(x) = eA_0(X)$، معادله دیراک یک بعدی در حالت $\psi(x,t) = e\text{-}i\varepsilon t\psi(x)$ در طرح جفت –برداری شکل زیر را خواهد داشت:

$$[i\frac{d}{dx}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + (\varepsilon-\upsilon_{(x)})\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - M\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]\begin{pmatrix} \varphi x) \\ \theta(x) \end{pmatrix} = 0 \qquad (3)$$

که $\varphi(x)$ و $\theta(x)$ مولفه های بالا و پایین تابع موج اسپینور $\psi(x)$ هستند. معادله بالا به جفت معادله دیفرانسیل زیر می تواند تجزیه شود:

$$-i\frac{d\theta(x)}{dx} + (\varepsilon-\upsilon_{(x)})\,\theta_{(x)} - M_{(x)}\varphi_{(x)} = 0 \qquad (4)$$

$$i\frac{d\varphi(x)}{dx} + (\varepsilon-\upsilon_{(x)})\,\varphi_{(x)} - M_{(x)}\theta_{(x)} = 0 \qquad (5)$$

با حذف مولفه اسپینور پایین $\theta(x)$ در دو معادله بالا و ترکیب این دو معادله، میتوان معادله شرودینگر گونه ای را برای مولفه اسپینور بالای $\varphi(x)$ تشکیل داد [1]:

$$-\frac{d^2\varphi(x)}{dx^2} + [2\varepsilon\upsilon_{(x)} - \upsilon^2_{(x)} - i\frac{d\upsilon(x)}{dx} - i\frac{1}{M(x)}\frac{dM(x)}{dx}(\varepsilon-\upsilon_{(x)})]\,\varphi_{(x)} + \frac{1}{M(X)}\frac{dM(x)}{dx}\frac{d\varphi(x)}{dx} = (\varepsilon^2 - M^2_{(x)})\varphi_{(x)} \qquad (6)$$

- دو اپراتور متقابل مرتبه اول هرمیتی و آنتی هرمیتی با جرم موثر به صورت زیر معرفی خواهند شد [5- 2]:

$$\eta_1 = -i[\mu_{(x)} \frac{d}{dx}] + F_{(x)} \quad (7)$$

$$\eta_2 = \mu_{(x)} \frac{d}{dx} + i F_{(x)} \quad (8)$$

که: $x \in (-\infty,+\infty)$, $M_{(x)} = m_0 m_{(x)}$; $\mu_{(x)} = \frac{1}{M(X)}$

$$\eta_j H = H^+ \eta_j \qquad ; \qquad j = 1,2 \quad (9)$$

با استفاده از نام گذاری $W_{(x)} = \mu_{(x)} \frac{d}{dx} [i(\mu_{(x)}(\varepsilon - \upsilon_{(x)})]$ واعمال رابطه (9) روی معادله (6) روابط زیر حاصل خواهند شد:

$$2\, i\, W_{(x)} \mu_{(X)} = -i\, 2\, \mu^2_{(x)} F'_{(X)} \quad (10)$$

$$W = -\mu_{(X)} F'_{(X)} \quad (11)$$

$$-i\, \mu^2_{(x)} F''_{(X)} - i\, \mu_{(x)} \mu'_{(x)} F'_{(X)} = i\, \mu_{(x)} W'_{(x)} \quad (12)$$

$$-2\mu^2_{(X)} \mu'_{(X)} (\varepsilon - \upsilon_{(X)})^2 + 2\mu^3_{(X)} (\varepsilon - \upsilon_{(X)}) \upsilon'_{(X)} - w_{(X)} F_{(x)} = W_{(x)} F_{(x)} \quad (13)$$

منجر می شود به:

$$Vj_{(X)} = -F^2_{(X)} - i\, \mu_{(x)} F'_{(X)} + \alpha_0 \quad (14)$$

که $\alpha_0 \in R$ ثابت انتگرال گیری است در نتیجه:

$$H = -\mu^2_{(X)} \frac{d^2}{d2_x} - \mu_{(x)} \mu'_{(x)} \frac{d}{dx} + Vj(X) \quad (15)$$

- در این بخش با استفاده از تغییر نقاط کانونی به شکل زیر:

$$\varphi_{(x)} = \psi(q_{(x)}) \quad (16)$$

خواهیم داشت:

$$-\mu^2[\frac{d2\psi(q)q'(x)}{dq(x)} q'(x) + \frac{d\psi(q(x))}{dq\,(x)} q''(x)\ ] - \mu_{(x)} \mu'_{(x)} [\frac{d\psi(q(x))}{dx} q'_{(x)}] + \quad (17)$$

$$(F^2_{(X)} - i\, \mu_{(x)} F'_{(X)}) + \alpha_0 - E)\, \psi(q_{(x)}) = 0$$

با جایگذاری $q'(x) = \frac{1}{\mu(x)}$ در رابطه (17) شکل کلی V_{eff} به صورت رابطه (20) حاصل خواهد شد:

$$-\frac{d2\psi(q)}{dq} + [\alpha_0 + Fj(x(q))^2 - i\, \mu_{(x)} F'_{(X)} - E\,]\, \psi(q) = 0 \quad (18)$$

$$\frac{dFj(x)}{dx} = \frac{dFj(qx)}{dx} = \frac{dq}{dx} \frac{dFj(q)}{dx} = -\frac{1}{\mu} \frac{dFj(q(x))}{dq} \quad (19)$$

$$V_{eff} = \alpha_0 + F_j(q)^2 - i\, F'_j(q) \quad (20)$$

- به عنوان مثال، یک η هرمیتی کاذب PT متقارن مدل Scarf II را در نظر می گیریم که با از اسفاده از جبر لی مختلط در [7] مورد مطالعه قرار گرفته است:

$$V(X) = -V_1 \mathrm{sech}^2 q - iV_2 \mathrm{sech}\, q \tanh q\, ; \qquad V_1 > 0\ ,\ V_2 \neq 0, V_1, V_2 \in R \quad (21)$$

$$E_{n,\epsilon} = -[\tfrac{1}{2}\sqrt{V1+\tfrac{1}{4}+|V2|} + \epsilon\sqrt{V1+\tfrac{1}{4}-|V2|} - n - \tfrac{1}{2}]^2 \;,\quad \epsilon = \pm 1 \qquad (22)$$

که:

$$n = 0,1,2,\ldots < \tfrac{1}{2}\,(\sqrt{V1+\tfrac{1}{4}+|V2|} + \epsilon\sqrt{V1+\tfrac{1}{4}-|V2|} - 1$$

به عبارت دیگر یک مولد η هرمیتی کاذب به شکل زیر:

$$F_j(q) = V_2 \operatorname{sech} q \;\Rightarrow\; F'_j(q) = V_2 \operatorname{sech} q \tanh q \qquad (23)$$

منجر خواهد شد به:

$$V_{eff}(q) = V^2_2 \operatorname{sech}^2 q - i\, V_2 \operatorname{sech} q \tanh q \qquad (24)$$

$$E_{n,\epsilon} = -[\tfrac{1}{2}\,(\sqrt{V_2^2+\tfrac{1}{4}+|V2|} + \epsilon\sqrt{V_2^2+\tfrac{1}{4}-|V2|}) - n - \tfrac{1}{2}]^2, \epsilon = \pm 1 \qquad (25)$$

$$E_{n,\epsilon=+1} = -[|V_2| - n - \tfrac{1}{2}]^2 \;;\; n = 0,1,2,\ldots n_{max} < (|V_2| - 1/2) \qquad (26)$$

نتیجه گیری:

با توجه به مطالعاتی که از قبل انجام شده شرایط عمومی تری برای هامیلتونی غیر هرمیتی در نظر گرفته شده است به طوری که هامیتونی های با تقارن PT دارای زیر مجموعه هایی است که به اصطلاح اپراتور η–هرمیتی–کاذب نامیده می شوند اگر چنانچه از تبدیل تشابه $\eta H \eta^{-1} = H^{+}$ پیروی کنند. در این مقاله ما با معرفی دو اپراتور مرتبه اول متقابل η–هرمیتی–کاذب و اعمال آن روی معادله شرودینگر گونه حاصل از معادله دیراک با جرم موثر را مورد بررسی قرار داده و به یک روش مرجع به شکل $V_{eff} = \alpha_0 + F_j(q)^2 - i\, F'_j(q)$ دست یافتیم که با استفاده ازآن پتانسیل ها با تقارن PT قابل حل می باشد. در مثال حل شده اثر از دست رفتن سطح انرژی برای $\epsilon = -1$ آشکار می شود [7-9].

مرجع ها:

[1] H.Panahi and Z. Bakhshi, Acta. Physica. Polonica B 41 (2010) 11

[2] O. Muatafa, S Habib Mazharimousavi, (2008)

[3] A. Mostafazadeh, J. Math. Phys. 43 (2002) 2814

[4] A. Mostafazadeh, Nucl.Phys. B 640 (2002) 419

[5] A. Mostafazadeh, J. Phys. A: Math. Gen. 38 (2005) 3213

[6] B. Bagchi and C. Quesne, Phys. Lett. A 300 (2002) 173

[7] R. Kretschmer and L. Szymanowski, Czech. J.Phys 54 (2004) 71

[8] O. Mustafa and M. Znojil, J. Phys. A:Math. Gen. 35 (2002) 8929

[9] B.F. Samsonov, P. Roy, J. Phys. A:Math. Gen. 38 (2005) L24