Institute for Research in Fundamental Sciences

مقاله نامه ی بیست و ششمین کنفرانس بهاره فیزیک- ۲۲-۲۳ خرداد ماه ۱۳۹۸

شماره(۵۱)

راهبرد کنترل دینامیکی بهینه- همدوس برای توقف وادوسی و شبیه سازی های کوانتومی

وحید رضوانی[۱]، علی رضاخانی[۱]

[۱] دانشگاه صنعتی شریف، دانشکده فیزیک

چکیده

ما ابتدا یک معادله مادر که تحول زمانی دینامیک یک سیستم کوانتومی باز را به طور خالص توصیف می کند، ارائه می کنیم. این معادله شکلی مشابه با معادله لیندبلادی دارد که توصیف کننده تغییر زمانی عملگر چگالی سیستم است. با در اختیار داشتن این معادله دینامیکی و همچنین استفاده از نظریه کنترل بهینه، راهبردی برای کنترل دینامیک یک سیستم کوانتومی باز ارائه می کنیم که مستقل از حالت اولیه سیستم می باشد. با استفاده از این راهبرد توانستیم دینامیک چنین سیستمی را به طور جزئی به سمت یک تحول یکانی هدایت کنیم، گیت های کوانتومی را در حضور محیط شبیه سازی کنیم و رفتار محیط را بطور منفعلانه دستخوش تغییر کنیم.

سیستم های کوانتومی معمولا در مجاورت با یک محیط برهم کنش می کنند. این برهم کنش ها اثرات مخربی روی ویژگی های کوانتومی همچون همدوسی و درهمتنیدگی دارند. حال می دانیم که این ویژگی ها نقشی حیاتی در رایانش کوانتومی، ارتباطات کوانتومی و ... دارند. برای حفظ این ویژگی ها از آسیب های محیطی می توان از کنترل بازخورد کوانتومی بهره گرفت که مبتنی بر اندازه گیری های کوانتومی است. همچنین در روش جدایش دینامیکی می توان با اعمال یک توالی نا پیوسته از میدان ها به سیستم، آن را در یک زمان بسیار بزرگ از محیط اطراف جدا نمود. در اینجا ما روشی را ارائه می کنیم که مبتنی بر کنترل بهینه دینامیکی یک سیستم کوانتومی باز از طریق میدان های خارجی است. این روش کنترل دینامیکی مستقل از حالت اولیه سیستم و هر نوع اندازه گیری کوانتومی است. ما از این روش برای وادار نمودن سیستم به انجام یک تحول یکانی (در نتیجه توقف وادوسی) در هر زمان دلخواهی بهره می بریم. همچنین این روش این انعطاف پذیری را دارد که از آن برای شبیه سازی های کوانتومی استفاده نمود. اما قبل از ارائه این روش ما یک معادله دینامیکی که به طور خالص دینامیک یک سیستم کوانتومی باز را توصیف می کند معرفی می کنیم.

یک سیستم کوانتومی با بعد فضای هیلبرت N که در مجاورت با یک محیط قرار دارد و توسط یک میدان خارجی وابسته به زمان $\varepsilon(t)$ تحریک می شود در نظر بگیرید. بنابراین هامیلتونی سیستم کل به صورت $H(t)=H_S+H_B+H_{\text{int}}-\varepsilon(t)\mu$ خواهد بود که در آن H_S (H_B) هامیلتونی آزاد سیستم کوانتومی (محیط) و همچنین H_{int} و μ به ترتیب هامیلتونی برهم کنش سیستم- محیط و عملگر هرمیتی سیستم (مانند عملگر گشتاور دوقطبی سیستم) را نشان می دهند. عمومی ترین هامیلتونی برهم کنش به صورت $H_{\text{int}}=\sum_\alpha A_\alpha\otimes B_\alpha$ می باشد که عملگرهای A_α و B_α عملگرهایی هرمیتی ای هستند که به ترتیب بر روی فضای هیلبرت سیستم و محیط عمل می کنند. حالت های اولیه سیستم کوانتومی و محیط را به ترتیب با عملگرهای $\rho_S(t_0)$ و ρ_B نمایش می دهیم و فرض می کنیم که حالت محیط در تمامی زمان های دیگر نیز بدون تغییر باقی می ماند. اگر فرض کنیم که حالت اولیه سیستم کل ناهمبسته است آنگاه حالت سیستم در هر زمان $t\geq t_0$ با یک نگاشت رَد نگهدار و کاملاً مثبت تعریف شده توسط

$$\rho_S(t)=\mathcal{E}_{(t,t_0)}\left[\rho_S(t_0)\right]=\sum_{\lambda,\mu=1}^{N^2}\chi_{\lambda\mu}(t,t_0)K_\lambda\rho_S(t_0)K_\mu^\dagger, \qquad (۱)$$

داده می شود که $\{K_\lambda\}_{\lambda=1}^{N^2}$ پایه های عملگری فضای هیلبرت سیستم هستند. ماتریس N^2 بعدی $\chi(t,t_0)$ به نام ماتریس فرآیند یک ماتریس هرمیتی و مثبت است که تمامی ویژگی های دینامیکی یک سیستم کوانتومی باز را در خود دارد. ما نشان داده ایم که در تقریب مارکوف می توان یک معادله دینامیکی برای ماتریس فرآیند با استفاده از روش میکروسکوپی به صورت پائین بدست آورد:

$$\frac{\mathrm{d}\chi(t,t_0)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{K}_t\left[\chi(t,t_0)\right],\qquad \mathcal{K}_t[\circ]=-i\left[G(t),\circ\right]+\sum_{\xi,\nu}\sum_{\omega}\gamma_{\xi\nu}(\omega)\left(F_\nu(\omega)\circ F_\xi^\dagger(\omega)-\tfrac{1}{2}\left\{F_\xi^\dagger(\omega)F_\nu(\omega),\circ\right\}\right), \qquad (۲)$$

که در آن مولفه های ماتریس N^2 بعدی $G(t)$ از $\left[G(t)\right]_{\alpha\beta}=\mathrm{Tr}_S\left(K_\alpha(H_S+H_{LS}-\varepsilon(t)\mu)K_\beta^\dagger\right)$ بدست می آیند که هامیلتونی H_{LS} سهم برهم کنش سیستم- محیط در تحول همدوس سیستم کوانتومی را نشان می دهد. همچنین مولفه های عملگر لیندبلاد $F_\nu(\omega)$ توسط رابطه $\left[F_\nu(\omega)\right]_{\alpha\beta}=\mathrm{Tr}_S\left(K_\alpha A_\nu(\omega)K_\beta^\dagger\right)$ به دست می آیند که در آن $A_\nu(\omega)$ از روی عملگر سیستم A_ν و طیف هامیلتونی آزاد سیستم به دست می آید. در معادله دینامیکی (۲) ضرایب غیر منفی لیندبلاد $\gamma_{\xi\nu}(\omega)$ همان تبدیل فوریه توابع همبستگی محیط هستند. معادله دینامیکی(۲) شکلی مشابه با معادله لیندبلاد ماتریس چگالی سیستم با همان ضرایب لیندبلاد را دارد اما عملگرهای لیندبلاد در این دو معادله با هم متفاوت هستند. با در دست داشتن این معادله دینامیکی می توان دینامیک یک سیستم کوانتومی را به طور مستقیم رصد نموده و دینامیک آن را به طور دلخواه با استفاده از یک عامل خارجی کنترل نمود به گونه ای که در نهایت به یک هدف از پیش تعیین شده نائل شویم. به عنوان مثال می توان تقاضا نمود که در لحظه دلخواه t_f دینامیک سیستم یک دینامیک دلخواه Ω_{t_f} باشد. به همین منظور یک معیار از مانستگی این دینامیک دلخواه و دینامیک بدست آمده از معادله (۲) در لحظه t_f یعنی $\chi(t_f,t_0)$ به صورت $\mathcal{F}\left[\chi(t_f,t_0);\Omega_{t_f}\right]=\mathrm{Tr}\left(\chi(t_f,t_0)\Omega_{t_f}\right)\Big/\left(\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\chi^2(t_f,t_0)\right)\mathrm{Tr}\left(\Omega_{t_f}^2\right)}\right)$ معرفی می کنیم که در صورتی برابر با یک خواهد بود که این دو دینامیک با یکدیگر برابر باشند. بنابراین مطابق با نظریه کنترل بهینه [1]، برای رسیدن به این هدف بایستی یک میدان کنترلی را به گونه ای تعیین کنیم که تابعی هدف پائین بیشینه شود:

$$\mathcal{J}=\mathcal{F}\left[\chi(t,t_0);\Omega_{t_f}\right]-\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{d}t\,\mathrm{Tr}\left(\left(\frac{\mathrm{d}\chi(t,t_0)}{\mathrm{d}t}-\mathcal{K}_t\left[\chi(t,t_0)\right]\right)\Lambda(t)\right)-\eta\int_{t_0}^{t_f}\mathrm{d}t\,\frac{\varepsilon^2(t)}{f(t)} \qquad (۳)$$

که در آن قید دینامیکی (۲) از طریق مضرب لاگرانژ $\Lambda(t)$ وارد این تابعی شده است. همچنین قید محدود بودن انرژی میدان خارجی از طریق جمله سوم در این تابعی قرار گرفته است به گونه ای که می توانیم انرژی این میدان را از طریق پارامتر η تنظیم کنیم. تابع شکل $f(t)$ برای قرار دادن میدان خارجی در وضعیت های خاموش و روشن معرفی شده است. اگر از تابعی (۳) نسبت به متغیر های آن وردش بگیریم به دو معادله دیفرانسیل خطی با شرایط مرزی مربوطه و همچنین رابطه ای برای میدان کنترلی بهینه به صورت پائین می رسیم:

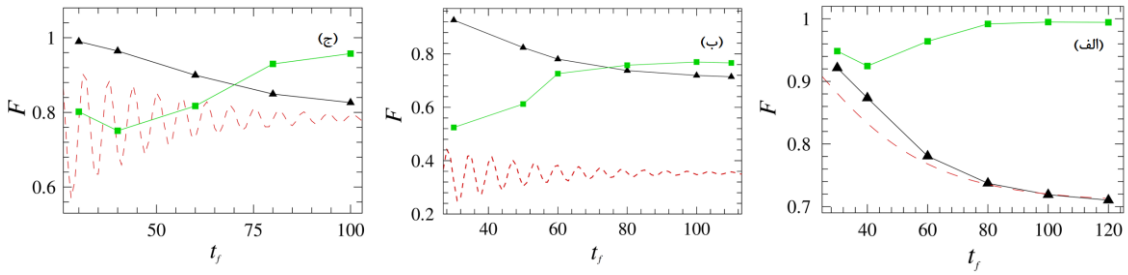
$$\frac{\mathrm{d}\chi(t,t_0)}{\mathrm{d}t}=\mathcal{K}_t\left[\chi(t,t_0)\right],\qquad \left[\chi(t_0,t_0)\right]_{\alpha\beta}=N\delta_{\alpha N^2}\delta_{\beta N^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Lambda(t)}{\mathrm{d}t}=-\mathcal{K}_t^\dagger\left[\Lambda(t)\right],\qquad \Lambda(t_f)=\frac{\Omega_{t_f}}{\sqrt{\mathrm{Tr}\left(\chi^2(t_f,t_0)\right)\mathrm{Tr}\left(\Omega_{t_f}^2\right)}}-\frac{\mathrm{Tr}\left(\chi(t_f,t_0)\Omega_{t_f}\right)\chi(t_f,t_0)}{\sqrt{\mathrm{Tr}^3\left(\chi^2(t_f,t_0)\right)\mathrm{Tr}\left(\Omega_{t_f}^2\right)}}$$

$$\varepsilon(t) = -\frac{f(t)}{2\eta}\,\mathrm{Im}\left\{\mathrm{Tr}\left(\left[\Phi, \chi(t,t_0)\right]\Lambda(t)\right)\right\} \qquad (۴)$$

که در معادله دینامیکی دوم $\mathcal{K}_t^\dagger$، تصویر هایزنبرگ $\mathcal{K}_t$ است و ماتریس هرمیتی Φ به صورت $[\Phi]_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr}_S\left(K_\alpha \mu K_\beta^\dagger\right)$ تعریف می شود. ما از یک الگوریتم تکرار رایج در کنترل بهینه یعنی روش کراتوف [2] برای حل معادلات (۴) و بدست آوردن میدان کنترلی بهینه بهره می گیریم.

به منظور حل عددی معادلات (۴)، یک سیستم دو ترازه (یک کیوبیت با گاف انرژی ω_0) واداشته که هامیلتونی آن با $H_S(t) = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z - \varepsilon(t)\sigma_x$ (σ_z) (σ_x) ماتریس پائولی z (x) است) داده می شود و در مجاورت با یک محیط بوزونی است در نظر می گیریم. فرض می کنیم این سیستم با محیط اطراف خود مطابق با مدل وافازی خالص برهم کنش می کند. بنابراین با توجه به مطالب بیان شده معادله دینامیکی حاکم بر تحول زمانی ماتریس فرآیند چنین کیوبیتی از رابطه $\frac{\mathrm{d}\chi(t,t_0)}{\mathrm{d}t} = -i\left[F_z - \varepsilon(t)F_x, \chi(t,t_0)\right] + \gamma_0\left(F_z\chi(t,t_0)F_z - \chi(t,t_0)\right)$ بدست می آید که $[F_\nu]_{\alpha\beta} = \mathrm{Tr}_S\left(K_\alpha \sigma_\nu K_\beta^\dagger\right)$ ($\nu = x, z$). با توجه به دینامیک دلخواه Ω_{t_f} سه سناریو در نظر می گیریم. در سناریوی اول



شکل۱ : مانستگی به عنوان تابعی از زمان نهائی برای (الف) توقف لحظه ای وادوسی، (ب) شبیه سازی گیت هادامارد و (ج) شبیه سازی کانال واقطبش. منحنی های مشکی مانستگی میان دینامیک دلخواه (Ω_{t_f}) و دینامیک ناشی از میدان بهینه دربرخی لحظه های t_f را نشان می دهند. مانستگی میان دینامیک دلخواه و دینامیک ناشی از میدان صفر به صورت تابعی از زمان با منحنی های قرمز خط چین نشان داده شده است. منحنی های سبز مانستگی میان دینامیک القا شده توسط میدان بهینه و دینامیک ناشی از میدان صفر را برای برخی زمان ها نشان می دهند. پارامترهای مربوط به این منحنی ها: $\omega_0 = 1$، $\gamma_0 = 0.02$ و $\eta = 1$ برای شکل(الف) و $\eta = 0.1$ برای شکل های (ب) و (ج). تمامی پارامترها و زمان ها بدون بعد انتخاب شده اند به طوری که $\hbar = 1$.

دینامیک هدف را تحول یکانی کیوبیت در نظر می گیریم که تنها با هامیلتونی سیستم تولید می شود یعنی: $H_S = \frac{1}{2}\omega_0\sigma_z$. این دینامیک یکانی به بیان ماتریس فرآیند به صورت

$$\left[\Omega_{t_f}^{(D)}\right]_{\alpha\beta} \equiv 2\,\mathrm{Sin}^2(\omega_0 t_f/2)\delta_{\alpha3}\delta_{\beta3} - i\,\mathrm{Sin}(\omega_0 t_f)\delta_{\alpha3}\delta_{\beta4} + i\,\mathrm{Sin}(\omega_0 t_f)\delta_{\alpha4}\delta_{\beta3} + 2\,\mathrm{Cos}^2(\omega_0 t_f/2)\delta_{\alpha3}\delta_{\beta3}. \qquad (۵)$$

خواهد بود. مانستگی دینامیک تحول یافته ناشی از میدان بهینه در زمان t_f با دینامیک دلخواه به صورت تابعی از زمان نهائی را در شکل۱(الف) مشاهده می کنید (نمودار مشکی). این شکل نشان می دهد که در زمان های کوتاه (زمان های $t_f \le 80$ برای یک دسته پارامترهای مشخص) می توان این سیستم کوانتومی باز را با یک میدان مناسب وادار به انجام یک تحول یکانی نمود که این خود به معنای توقف آنی وادوسی است. این در حالی است که در زمان های دلخواه بزرگ اعمال یک میدان خارجی به سیستم، کمکی برای رسیدن به این هدف به ما نخواهد کرد. در سناریوی دوم هدف ما شبیه سازی یک گیت کوانتومی بود. گیت کوانتومی مورد نظر را یک گیت کوانتومی تک کیوبیتی یعنی

گیت هادامارد $U^{(H)}$در نظر گرفتیم که یکی از گیت های مورد نیاز برای رایانش کوانتومی است. مولفه های این گیت کوانتومی به بیان ماتریس فرآیند به صورت $\left[\Omega^{(H)}\right]_{\alpha\beta} \equiv \mathrm{Tr}_S\left(U^{(H)}K_\alpha^\dagger\right)\mathrm{Tr}_S\left(U^{(H)}K_\beta^\dagger\right)^*$خواهد بود. در تمامی زمان های نهائی ای که شبیه سازی انجام گرفته، مانستگی بهینه شده بیش از۰/۷بود (شکل۱(ب) را ببینید). در سناریوی دوم قصد داریم با اعمال یک میدان خارجی تنها به سیستم مورد نظر رفتار محیط را کنترل نمائیم. به عنوان مثال می خواهیم با اعمال یک میدان مناسب به سیستم در لحظه t_f یک کانال کوانتومی مانند کانال واقطبش را شبیه سازی کنیم. بنابراین شکل این کانال با احتمال خطای p به بیان ماتریس فرآیند به صورت $\left[\Omega^{(D)}\right]_{\alpha\beta} \equiv \frac{2p}{3}\left(\delta_{\alpha1}\delta_{\beta1}+\delta_{\alpha2}\delta_{\beta2}+\delta_{\alpha3}\delta_{\beta3}\right)+2(1-p)\delta_{\alpha4}\delta_{\beta4}$خواهد بود. نتایج عددی ما (شکل۱(ج) را ببینید) نشان می دهند که در تمامی زمان های شبیه سازی شده مانستگی میان این کانال دلخواه و دینامیک تحول یافته در لحظه t_fالقا شده توسط میدان کنترلی بهینه بیش از۰/۸است.

نتیجه گیری

دینامیک یک سیستم کوانتومی باز را می توان با استفاده از معادله دینامیکی(۲) به طور مستقیم رصد نمود. با استفاده از این معادله و همچنین نظریه کنترل بهینه، یک راهبرد واحد و مستقل از حالت اولیه سیستم برای توقف لحظه ای وادوسی و شبیه سازی های کوانتومی ارائه نموده ایم.

مرجع‌ها

1) D. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*, (Dover Publications, 2012).
2) J. P. Palao and R. Kosloff, *Phys. Rev. A* **68** 062308 (2003).