

رفتار و توزیع جهتی ریزشناگرهای کره گون کشیده در شاره کوئت

ارغوان پرتوی فرد^۱، امیر عباسی^۱، محمدرضا شبان نیا^۱، و علی ناجی^۱

^۱ پژوهشکده فیزیک، پژوهشگاه دانش های بنیادی، تهران

چکیده. در مقاله حاضر به مطالعه ی رفتار جمعی ریزشناگرهای کره گون با نسبت ابعاد مختلف در میدان شارهی کوئت پرداخته ایم. برای توضیح تابع های توزیع احتمال کره گون های کشیده، از مسیرهای دهنادی (تعیینی) استفاده کرده ایم. هم چنین مدارهای جفری برای ذرات فعال و نواحی ممنوعه فضای فاز مکان-جهت گیری را برای این ریزشناگرها بررسی کرده ایم.

محلول های شامل ذرات فعال، سیستم هایی دور از تعادل هستند که به عنوان شاره ی فعال شناخته می شوند. حرکت این ذرات فعال (ریزشناگرها) در شارهی داخل کانال ویژگی های قابل توجهی دارد. از طرفی این ذرات به دلیل فعال بودن و نفوذناپذیر بودن دیواره تمایل دارند که در کنار دیواره جمع شوند و از طرف دیگر اعمال شاره باعث وارد شدن گشتاوری بر ذرات می شود که جمعیت ریزشناگرهای نزدیک دیواره را کاهش می دهد. این پدیده به صورت شبیه سازی در حضور شارهی پوازویی و کوئت گزارش شده است [۱]. به عنوان نمونه ای از مدل های پیوستار در مقاله ی [۲] بررسی جمعی از تاثیر اعمال شارهی پوازویی بر مخلوطی از ذرات فعال میله ای شکل محبوس انجام گرفته است. در مقاله [۳] رفتار جمعیتی و توزیع جهتی ریزشناگرهای میله ای در کانال های بسیار باریک بررسی شده است. در این مقاله، حرکت مخلوط رقیقی از شناگرهای کره گون کشیده با نسبت ابعاد مختلف تحت تاثیر شارهی کوئت دو بعدی با پهنای کانال متفاوت و نیز مسیر های دهنادی یک ریز شناگر در شرایط ذکر شده مورد بررسی قرار گرفته است. در این مقاله از مدل ذرات براونی فعال در دو بعد برای شبیه سازی استفاده شده است [۲، ۴]. هر یک از این ذرات سرعت ذاتی با اندازه ثابت در راستای شمای $\hat{\mathbf{p}}$ ، دارند. شناگرها به صورت کره گون هایی با نسبت قطر بزرگ به کوچک r مدل شده اند که این مقدار برای کره گون های کشیده بزرگتر از یک $r > 1$ ، است. ضریب پخش چرخشی کره گون ها با $D_R(r)$ نمایش داده شده و ضریب پخش انتقالی بر حسب دو جمله ی ضریب پخش موازی و عمود به شکل $\mathbb{D} = D_{\parallel}(r) \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}} + D_{\perp}(r) (\mathbb{I} - \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}})$ نوشته می شود [۵]. مخلوط ریزشناگرها داخل کانال تخت، تحت تاثیر میدان شارهی یکنواخت کوئت $\dot{\gamma}y = u(y)$ قرار دارد. این شاره گشتاور ثابتی در طول کانال ایجاد می کند. برای بررسی رفتار جمعی شناگرها فقط به سرعت زاویه ای ناشی از این شاره احتیاج داریم که با رابطه

$$\omega_f = (\mathbb{I} - \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}) \cdot [\beta [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\dagger]/2 + [\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^\dagger]/2] \cdot \hat{\mathbf{p}}, \quad (1.0)$$

که در آن $\beta = (r^2 - 1)/(r^2 + 1)$ است. باید خاطر نشان کرد که مخلوط ریزشناگرها به قدری رقیق در نظر گرفته می شود که بتوان برای توصیف احتمالاتی آنها از معادله ی اسمولوخوفسکی بدون برهمکنش هیدرودینامیکی بین ریزشناگرها استفاده کرد. معادله ی اسمولوخوفسکی برای به دست آوردن تابع چگالی احتمال مکان-جهت گیری به صورت [۴]

$$\nabla_{\mathbf{r}} \cdot (\mathbf{v}_{\mathbf{r}} \Psi) + \nabla_{\mathbf{p}} \cdot (\omega_{\mathbf{p}} \Psi) = \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbb{D} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \Psi + D_R \nabla_{\mathbf{p}}^2 \Psi, \quad (2.0)$$

داده می شود که $\mathbf{v}_{\mathbf{r}} = V_s \hat{\mathbf{p}} + \mathbf{u}(y)$ و $\omega_{\mathbf{p}} = \omega_f$ ، به ترتیب سرعت شار انتقالی و چرخشی هستند. بردار یکه $\hat{\mathbf{p}}$ بر حسب زاویه ی قطبی θ ، نسبت به محور x و به صورت $\hat{\mathbf{p}} = (\cos \theta, \sin \theta)$ تعریف می شود. با استفاده از تقارن مسئله در راستای x چگالی احتمال به شکل $\Psi(\theta, y)$ ساده می شود. این تقارن به شکل ساده شده ای از معادله ی (۲.۰) در فضای مکان-جهت گیری ممنجری شود. بدون کاستن از کلیت مدل می توان بازه زاویه را به صورت $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ تعریف کرد. در این مدل، H طول در دسترس کانال برای ریزشناگرها است. فرض می کنیم که تعداد ریزشناگرها داخل کانال ثابت بوده و نیز شرط رقیق بودن را برآورده کنند.

برای حل عددی معادله ی (۲.۰)، آن را با عبارات، $\tilde{\Psi}(\theta, \tilde{y}) = a\Psi(\theta, a\tilde{y})/\bar{n}$ بی بعد می کنیم که در آن $\tilde{y} = y/a$ ، شعاع کره هم حجم با کره گون و \bar{n} چگالی متوسط ریزشناگرها است. مقیاس های زمانی مسئله با ضریب پخش چرخشی کره ی هم حجم با کره گون $D_R(1) = k_B T / (\lambda \pi \eta a^3)$ بی بعد شده اند. برای طول بی بعد شده ی کانال، پکله ی شنا و پکله ی شاره به ترتیب داریم:

$$\tilde{H} = \frac{H}{a}, \quad Pe_s = \frac{V_s/a}{D_R(1)}, \quad \text{و} \quad Pe_f = \frac{\dot{\gamma}}{D_R(1)}, \quad (3.0)$$

از این به بعد در تمامی معادلات \sim را حذف می‌کنیم.

برای به دست آوردن مسیرهای دهنادی از حل معادلات دیفرانسیل جفت شده

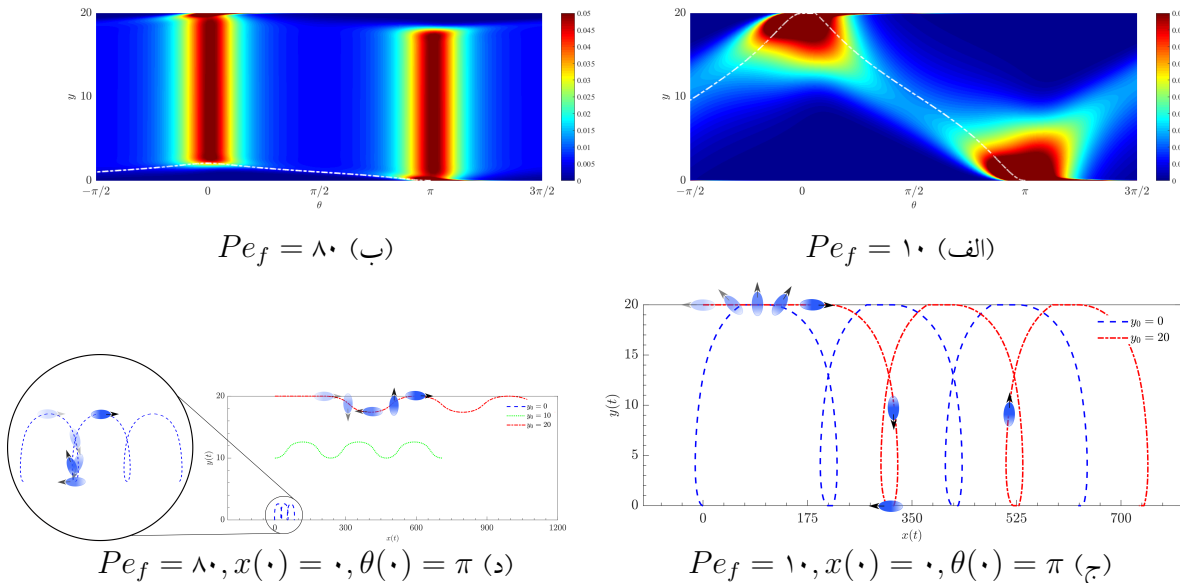
$$\dot{x}(t) = V_s \cos(\theta(t)) + u(y(t)) \quad (۴.۰)$$

$$\dot{y}(t) = V_s \sin(\theta(t)) \quad (۵.۰)$$

$$\dot{\theta}(t) = \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} (\beta \cos(\theta(t)) - 1) \quad (۶.۰)$$

استفاده می‌کنیم [۶].

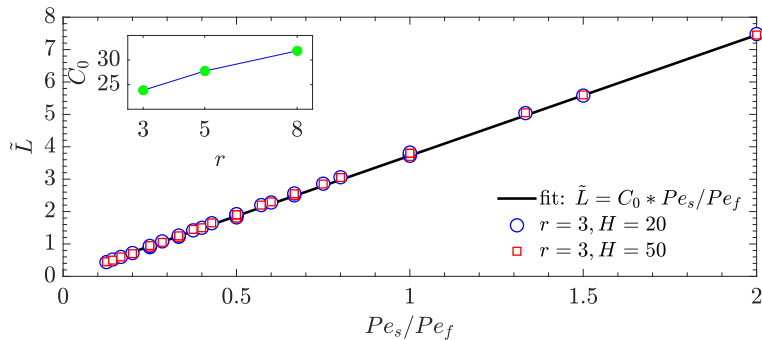
برای اعمال شرایط دیواره نفوذناپذیر از شرط مرزی سر استفاده می‌کنیم. در شکل‌های (۱)(الف) و (۱)(ب) توزیع



شکل ۱: نمودار چگالی توزیع ریزشناگرها $\Psi(\theta, y)$ و مسیرهای به دست آمده در صفحه $x - y$ برای یک ریزشناگر بر حسب زمان با $r = 3$. در (الف) $Pe_f = 10$ و (ب) $Pe_f = 80$ خط‌چین‌های سفید، توزیع $\theta - y$ به دست آمده از مسیر دهنادی برای ریزشناگری با زاویه‌ی اولیه‌ی مدار جفری. $\theta = \pi$ و $y = 0$ است. (ج) $Pe_s = 50$ و (د) $Pe_s = 50$ ، مسیرهای مختلف برای ریزشناگری با $y(0)$ های متفاوت در بازه سه دوره زمانی از مدار جفری.

چگالی احتمال، $\Psi(y, \theta)$ برای ریزشناگرهای کشیده با نسبت ابعاد $r = 3$ در حدود محاسباتی مسئله $y \in [0, H]$ و $\theta \in [-\pi/2, 3\pi/2)$ در کانال با عرض $H = 20$ نمایش داده شده است. همانطور که در نوار رنگی مشخص است رنگ های گرم نشانگر چگالی احتمال بالا و رنگ های سرد نشانگر چگالی احتمال پایین هستند. در شکل‌های (۱)(ج) و (۱)(د) مسیرهای دهنادی ریزشناگری با همان پارامترها و شرایط اولیه ذکر شده در شکل، در فضای $x - y$ نمایش داده شده است. در عدم حضور شاره، ریزشناگرها تمایل زیادی به جمع شدن در کنار دیواره دارند. تنها عاملی که می‌تواند باعث تغییر زاویه‌ی ریز شناگرها و جداسدن آنها از دیواره شود، پخش زاویه‌ی ای است. در مورد دیواره بالا (پایین) به محض اینکه ریزشناگرها در زوایای بزرگتر (کوچکتر) از π یا کوچکتر (بزرگتر) از صفر قرار می‌گیرند از دیواره جدا می‌شوند. در دیواره‌ی بالا اگر ریز شناگری در زوایای بین صفر و π قرار بگیرد در کنار دیواره باقی می‌ماند. به دلیل نقش ضعیف پخش در حدود مورد بررسی در مقایسه با پکله شنای قابل توجه، در مسیر تقریباً صاف در طول کانال حرکت می‌کنند.

شکل (۱)(الف) مربوط به $Pe_s = 50$ و $Pe_f = 10$ (رژیم خودرانس قوی) است. و نشان می‌دهد که ریزشناگرها در نزدیک دیواره‌ی بالا (پایین) با زوایای نزدیک به صفر (π) احتمال حضور بیشتری دارند. در این مورد پدیده‌ی غالب برای جدا کردن ریزشناگرها از دیواره، گشتاور ساعتگرد ناشی از شاره است. بنابراین بیشتر ریزشناگرها از دیواره بالا (پایین) با زاویه‌ی صفر (پی) جدا می‌شوند و در حالی که دور خودشان در مدار جفری می‌چرخند شنا هم می‌کنند. مسیر حرکت در این حالت در شکل (۱)(ج) نمایش داده شده است. در حالت کلی کره‌گون‌ها در هنگام قرار گرفتن در شاره‌ی کوئت با سرعت غیر یکنواخت در مدارهایی موسوم به مدار جفری دور خودشان می‌چرخند [۷]. دوره‌ی حرکت ریزشناگرها در این مسیر برابر است. $T = 2\pi \frac{r+1/r}{\dot{\gamma}}$ کره‌گون‌های کشیده در زوایای صفر و π که قطر بزرگ کره‌گون هم‌راستای جهت شاره است، مدت اقامت بیشتری از سایر زوایا دارند. نکته قابل توجه این است که با وجود مختل شدن مسیر مدار جفری به علت فعال بودن ریزشناگرها، این ذرات هم‌چنان در یک مدار ثابت حرکت می‌کنند.



شکل ۲: ارتفاع ناحیه ممنوعه فضای فاز بر حسب نسبت Pe_s/Pe_f برای $r = 3$. دایره‌های توخالی مربوط به $H = 20$ و مربع‌های توخالی مربوط به $H = 50$ هستند. خط مشکی رنگ مربوط به برازش خطی داده‌ها است. در نمودار الحاقی مقادیر C_0 به دست آمده از برازش برای نسبت‌های ابعادی $r = 3, 5, 8$ نشان داده شده است.

در حدود ذکر شده از پیکله‌ی شنا و پیکله‌ی شاره، تا رسیدن ریزشناگر به دیواره پایین (بالا) ریزشناگر یک مدار جفری را طی می‌کند و با زاویه‌ی π (صفر) که زمان اقامت زیادی دارد نزدیک دیواره پایین (بالا) قرار می‌گیرد. در واقع اگر به نمودار چگالی احتمال در راستای زاویه‌ای نگاه کنیم نقاط با چگالی احتمال بالا مربوط به زوایای مرجح جفری هستند. در شکل (۱) (ب) نمودار چگالی احتمال $Pe_s = 50$ و $Pe_f = 80$ رسم شده است. در این حالت، ارتفاع مسیر جفری که ریزشناگرها طی می‌کنند (شکل (۱) (د))، کوچکتر از حالت قبلی است. چون بنابر رابطه‌ی زمان اقامت جفری، ریز شناگرها سریع‌تر تغییر جهت می‌دهند.

آن‌طور که در شکل (۲) مشخص است، فاصله‌ای میان ستون رشد کرده از دیواره بالا تا دیواره پایین وجود دارد. این ناحیه از فضای فاز که در دسترس ریزشناگرها نیست را ناحیه ممنوعه می‌نامیم. در بازه‌ی $Pe_s \in [50, 200]$ و $Pe_f \in [100, 400]$ برای نسبت‌های ابعادی $r = 3, 5, 8$ برای دو عرض کانال $H = 20, 50$ ارتفاع ناحیه ممنوعه مورد مطالعه قرار گرفته است. در این مطالعه نشان داده شد که در رژیم خودرانش قوی، ریزشناگرها در حین چرخیدن دور خود از دیواره بالا (پایین) به دیواره پایین (بالا) منتقل می‌شوند، در حالیکه در رژیم شارش قوی، ریز شناگرها در مداری با ارتفاع به مراتب کمتر از طول کانال در حال رفت و برگشت بین دو ستون جمعیتی تشکیل شده هستند. بنابراین احتمال یافتن ریزشناگرها در وسط کانال در حالت اول به مراتب کمتر از حالت دوم است. نکته مهم در مورد مدارهای جفری این است که ذره با وجود اینکه حرکتش مختل شده پیوسته در یک مدار ثابت حرکت می‌کند. طول ناحیه‌ی تخلیه در نمودارهای توزیع چگالی احتمال، همان طول مدارهایی است که ریز شناگرها می‌پیمایند و رابطه‌ی تقریباً خطی با نسبت پیکله شنا به پیکله شاره دارد.

- [1] Sandeep Chilukuri, Cynthia H Collins, and Patrick T Underhill. Impact of external flow on the dynamics of swimming microorganisms near surfaces. *Journal of Physics: Condensed Matter*, 26(11):115101, 2014.
- [2] Barath Ezhilan and David Saintillan. Transport of a dilute active suspension in pressure-driven channel flow. *Journal of Fluid Mechanics*, 777:482–522, 2015.
- [3] Hossein Nili, Masoud Kheyri, Javad Abazari, Ali Fahimniya, and Ali Naji. Population splitting of rodlike swimmers in couette flow. *Soft Matter*, 13:4494–4506, 2017.
- [4] Mohammad Reza Shabanniya and Ali Naji. Klinotactic response of sheared prolate and oblate swimmers in transverse field. *Soft Matter*, 2019. (Submitted).
- [5] Francis Perrin. Mouvement brownien d'un ellipsoïde - i. dispersion diélectrique pour des molécules ellipsoïdales. *Journal de Physique et le Radium*, 5(10):497–511, 1934.
- [6] Roberto Rusconi, Jeffrey S Guasto, and Roman Stocker. Bacterial transport suppressed by fluid shear. *Nature physics*, 10(3):212, 2014.
- [7] G. B. Jeffery. The motion of ellipsoidal particles immersed in a viscous fluid. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 102(715):161–179, nov 1922.