

احتمال گذر از مرز در تورم تصادفی

مه‌دی‌ار نوربالا^۱

^۱ دانشگاه تهران، دانشکده فیزیک

^۲ پژوهشگاه دانش‌های بنیادی، پژوهشکده نجوم

چکیده

مفهوم احتمال گذر از مرز در تورم تصادفی را معرفی کرده و به کمک نظریه فرآیندهای تصادفی آن را محاسبه می‌کنیم. کاربرد این روش را در یافتن احتمال فرار از سد پتانسیل نشان می‌دهیم. همچنین به رفتار بحرانی در نواحی بی‌کران دو بعدی اشاره خواهیم نمود و روشی برای ساختن جواب در ۲ بعد ارائه می‌نماییم.

۱ مقدمه

در میان مدل‌های کیهان اولیه سناریوی تورمی محبوب‌ترین و موفق‌ترین مدل می‌باشد. افت و خیزهای کوانتومی میدان تورمی منشأ بذره‌های نخستین ساختارهای موجود در عالم و همچنین اختلالات مشاهده شده در تابش پس‌زمینه کیهانی می‌باشند. محاسبات مربوط به این اختلالات با توجه به ماهیت آن‌ها به طور طبیعی با استفاده از نظریه میدان‌های کوانتومی انجام می‌شده است. در این میان رویکرد تصادفی به تورم منجر به ساده‌سازی‌های فراوان در برخی محاسبات و همچنین ارائه تصویری ساده از فرآیند فیزیکی مورد مطالعه می‌شود. در این رویکرد ماهیت کوانتومی اختلالات، که در مقیاس فراق کلاسیک شده‌اند، تغییر کرده و به صورت یک میدان تصادفی کلاسیک توصیف می‌شوند. می‌توان نشان داد که تحول D میدان تورمی φ_i با معادله لانژوین داده می‌شود که تحت شرایط غلتش کند به صورت

$$\frac{d\varphi_i}{dN} = -M_P^2 \frac{v_{,i}}{v} + \sqrt{2v} M_P \xi_i. \quad (1)$$

است [۱]. در این معادله $M_P = 1/\sqrt{\Lambda\pi G}$ جرم پلانک، $V(\varphi) = 24\pi^2 M_P^4 v$ پتانسیل میدان تورمی، $H = \sqrt{V/3M_P^2}$ پارامتر هابل، و N تعداد e تاها می‌باشند. جمله اول در سمت راست همان نیروی رانش کلاسیک است که در معادله حرکت کلاسیک نیز دیده می‌شود. جمله دوم ناشی از افت و خیزهای کوانتومی است که معادل نوفه‌های سفید مستقل با دامنه $H/2\pi$ هستند، یعنی

$$\langle \xi_i(N) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(N) \xi_j(N') \rangle = \delta_{ij} \delta(N - N'). \quad (2)$$

در ادامه مفهوم احتمال اولین گذر از مرز را معرفی می‌کنیم و به محاسبه آن در چند مورد خاص می‌پردازیم.

۲ احتمال اولین گذر

میدان φ با نقطه‌ای در فضای D بعدی مشخص می‌شود. ناحیه‌ای از این فضا را که شرایط تورمی در آن ارضا می‌شود با Ω نشان می‌دهیم. مرز Ω دو قسمت دارد، یکی $\partial\Omega_-$ که نشانگر سطح بازگرمایش است و دیگری $\partial\Omega_+$ که نمایانگر مقادیر بزرگ φ یا انرژی‌های بالاست. میدان با شروع از موقعیت اولیه $\varphi(N=0) = \phi_0$ مسیری تصادفی را طی می‌کند و با رسیدن به هر یک از مرزها تورم به پایان می‌رسد. احتمال پایان تورم از طریق گذر از $\partial\Omega_{\pm}$ را با $p_{\pm}(\phi_0)$ نشان می‌دهیم. حال از لم ایتو برای محاسبه p_{\pm} استفاده می‌کنیم. بنابر این لم، برای هر تابع $f(\phi)$ داریم

$$\begin{aligned} df(\varphi) &= f_{,i}(\varphi) d\varphi_i + \frac{1}{2} f_{,ij}(\varphi) d\varphi_i d\varphi_j + \mathcal{O}(d\varphi^3) \\ &= M_P f_{,i} \sqrt{2v} \xi_i dN - M_P^2 f_{,i} \frac{v_{,i}}{v} dN + M_P^2 f_{,ii} v dN + \mathcal{O}(dN^2). \end{aligned} \quad (3)$$

که در خط دوم از معادله لانژوین (۱) و خاصیت $(\xi_i dN)^2 = dN$ استفاده کرده‌ایم. حال f را طوری انتخاب کنید که در معادله

$$f_{,ii} v - f_{,i} \frac{v_{,i}}{v} = 0 \quad (4)$$

صدق کند. اگر از رابطه (۳) از زمان $N = 0$ تا زمان برخورد به مرز $N = N$ انتگرال و سپس میانگین بگیریم، و از صفر شدن $\langle \int g \xi dN \rangle$ به ازای هر تابع g استفاده کنیم، به دست می‌آوریم [۲]

$$\langle f(\varphi(N)) \rangle - f(\phi_0) = 0. \quad (5)$$

با انتخاب شرایط مرزی $f(\partial\Omega_+) = 1$ و $f(\partial\Omega_-) = 0$ خواهیم داشت $f(\phi_0) = p_+(\phi_0)$. به طور مشابه، اگر f در شرایط $f(\partial\Omega_+) = 0$ و $f(\partial\Omega_-) = 1$ صدق کند، خواهیم داشت $f(\phi_0) = p_-(\phi_0)$. در حالت کلی حل این معادلات ساده نخواهد بود، اما در مورد تورم تک میانه $D = 1$ در بازه $\Omega = [\phi_-, \phi_+]$ معادله (۴) حل دقیق دارد:

$$p_{\pm}(\phi_0) = \pm \frac{\int_{\phi_{\mp}}^{\phi_0} e^{-\frac{1}{v(\phi)}} d\phi}{\int_{\phi_{\mp}}^{\phi_+} e^{-\frac{1}{v(\phi)}} d\phi}. \quad (6)$$

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که $p_+ + p_- = 1$.

۳ احتمال فرار از سد پتانسیل

به عنوان یک کاربرد از نتایج بخش قبل، پتانسیلی را در نظر می‌گیریم که دارای یک کمینه ϕ_0 احاطه شده توسط دو بیشینه ϕ_+ در راست، و ϕ_- در چپ باشد. فرض کنیم در زمان اولیه میدان در ϕ_0 قرار داشته باشد. افت و خیزهای تصادفی می‌توانند میدان را به بالای یکی از سدهای پتانسیل بکشانند و از آنجا به راست یا چپ بغلطانند. احتمال فرار میدان از سمت راست یا چپ با استفاده از رابطه (۶) به دست می‌آید. اگر نسبت این دو احتمال را با $R = p_+/p_-$ تعریف کنیم، با استفاده از تقریب تندترین نزول حول نقاط بیشینه به دست می‌آوریم [۳]

$$R \simeq \sqrt{\frac{v''(\phi_+) v(\phi_-)}{v''(\phi_-) v(\phi_+)}} \exp\left[\frac{1}{v(\phi_+)} - \frac{1}{v(\phi_-)}\right]. \quad (7)$$

(اعتبار این تقریب در گروهی برقراری روابط

$$\frac{v(\phi_+) |v'''(\phi_+)|}{|v''(\phi_+)|^{3/2}} \ll 1, \quad \frac{|v''(\phi_+)|}{v(\phi_+)^2} \phi_+^2 \gg 1 \quad (8)$$

می‌باشد). مرتبه بزرگی این عبارت با $R \sim e^{1/v(\phi_+) - 1/v(\phi_-)}$ مشخص می‌شود که با شهود ما کاملاً سازگار است: میدان از سمتی فرار می‌کند که سد کوتاه‌تری پیش رویش داشته باشد. در واقع رابطه (۷) دقیقاً معادل نسبت نرخ واپاشی خلأ هاوکینگ-ماس است. چنین نتیجه‌ای پیامد مستقیمی از این امر است که در حد بررسی شده توسط هاوکینگ و ماس عنصر غالب در رفتار میدان افت و خیزهای حرارتی ناشی از دمای دوسیه است، نه تونل‌زنی کلمن-دالوچا از زیر سد.

۴ بعد بحرانی $D = 2$

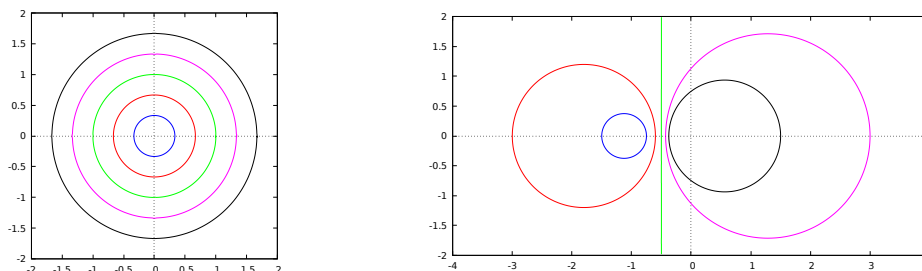
اگر پتانسیل فقط تابعی از $r = \sqrt{\phi_1^2 + \dots + \phi_D^2}$ باشد و ناحیه $\Omega = \{\phi | r_- \leq r \leq r_+\}$ متقارن باشد، آنگاه معادله (۴) عملاً تک‌متغیره شده و حل می‌شود:

$$p_{\pm}(\phi) = \pm \frac{\int_{r_{\mp}}^{r(\phi)} r'^{1-D} e^{-\frac{1}{v(r')}} dr'}{\int_{r_{\mp}}^{r_+} r'^{1-D} e^{-\frac{1}{v(r')}} dr'}. \quad (9)$$

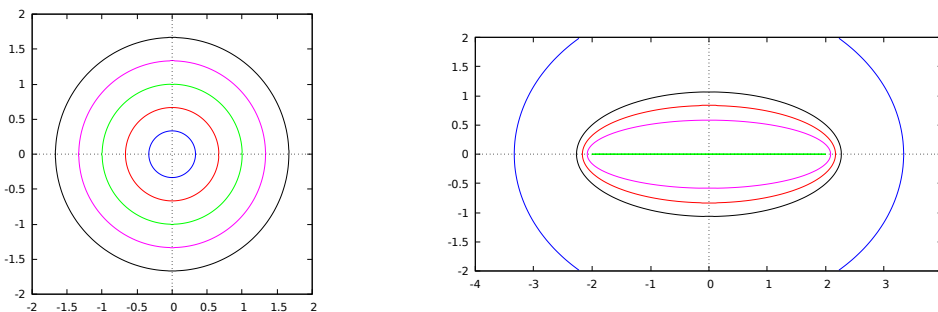
به ازای $D \leq 2$ و در حد $r_+ \rightarrow \infty$ که مرز خارجی $\partial\Omega_+$ به بی‌نهایت میل می‌کند، جواب حدی چنین خواهد شد:

$$p_+(\phi) = 1 - p_-(\phi) = \begin{cases} 1 & \phi \in \partial\Omega_+, \\ 0 & \phi \in \text{int}(\Omega), \\ 0 & \phi \in \partial\Omega_-, \end{cases} \quad (10)$$

یعنی با شروع از هر نقطه میانی، احتمال رسیدن به مرز خارجی در ناحیه بی‌کران صفر است. اما برای ابعاد بالاتر $D > 2$ همیشه این احتمال غیرصفر است [۴]. می‌توان نشان داد که این نتیجه مستقل از تقارن‌های پتانسیل است و پیامد مستقیمی است از رفتار متفاوت تابع گرین، که برای ابعاد $D > 2$ به صورت $1/r^{D-2}$ است و برای $D = 2$ به صورت $[\log r]$ [۵].



شکل ۱: تبدیل موبیوس $z \mapsto z' = 1/(z - 1)$ دوایر صفحه z (چپ) را به دوایر صفحه z' (راست) می‌برند.



شکل ۲: تبدیل جوکوسکی $z \mapsto z' = z + 1/z$ دوایر صفحه z (چپ) را به بیضی‌هایی در صفحه z' (راست) می‌برند.

۵ ساخت حل‌های $D = 2$ بعدی

یکی از خواص مهم معادله (۴) ناوردایی آن تحت تبدیلات همدیس در دو بعد است [۵]. متغیر مختلط $z = \phi_1 + i\phi_2$ را تعریف می‌کنیم. در این صورت عبارت $\nabla^2 p + g^{ij} \partial_i \frac{1}{v} \partial_j p$ ناوردایی است که در مختصات z و z' مقادیر

$$\left| \frac{\partial z'}{\partial z} \right|^2 \left(\partial'_i \partial'_i p + \partial'_i \frac{1}{v'} \partial'_i p \right) = \partial_i \partial_i p + \partial_i \frac{1}{v} \partial_i p. \quad (11)$$

را به خود می‌گیرد. بنابراین اگر $p(z)$ جوابی برای معادله (۴) باشد و $z' = f(z)$ تبدیلی همدیس، آنگاه $p'(z') = p(f^{-1}(z'))$ هم جوابی برای همان معادله است روی ناحیه $\Omega' = f(\Omega)$.

بدین ترتیب ابزار ساده‌ای داریم که با دانستن جواب برای مسأله‌ای ساده (مثل معادله (۹) برای پتانسیل متقارن $v(r)$)، جواب مسائلی با پتانسیل‌های جدید را به دست می‌دهد. به عنوان مثال تبدیلی موبیوس $f(z) = 1/(z - a)$ را در نظر بگیرید که دایره را به دایره می‌برد (شکل ۱). از آن‌جا که $v(r)$ فقط تابعی است از

$$|z|^2 = \left| \frac{1}{z'} + a \right|^2 = a^2 + \frac{1 + 2a\phi'_1}{\phi'^2_1 + \phi'^2_2}, \quad (12)$$

خطوط تراز هر پتانسیل $v'(\phi'_1, \phi'_2)$ که فقط تابعی از ترکیب $|\phi'|^2 / (1 + \mathbf{k} \cdot \phi')$ باشد (برای بردار ثابت \mathbf{k}) مانند سمت راست شکل ۱ است و برای آن احتمال گذر از مرز به سادگی با بازنویسی (۹) برحسب متغیرهای پریم‌دار به دست می‌آید. مثال دیگر تبدیل جوکوسکی $2z'/a = z + 1/z$ است که دایره را به بیضی می‌نگارد (شکل ۲). در این مورد

$$az = z' \pm \sqrt{z'^2 - a^2} \quad (13)$$

بنابراین برای هر پتانسیل $v'(\phi'_1, \phi'_2)$ که تنها تابعی از $|z' \pm \sqrt{z'^2 - a^2}|$ باشد احتمال گذر را می‌دانیم.

۶ نتیجه‌گیری

یکی از مفاهیم اساسی در حوزه تورم تصادفی احتمال گذر از مرز p_{\pm} است که از جمله در محاسبه احتمال فرار از سد پتانسیل کاربرد دارد. ملاحظه کردیم که در دو بعد p_{\pm} روی نواحی بی‌کران رفتاری بحرانی نشان می‌دهد. همچنین تبدیلات همدیس امکان پیدا کردن جواب را در موارد متعددی فراهم می‌کنند.

قدردانی

این کار حاصل چند همکاری در سالیان اخیر است و بیش از هر کس حسن فیروزجاهی در آن‌ها مشارکت داشته که قدردان همفکری و کمک‌های وی هستم. همچنین مايلم از دیگر همکارانم، هوشيار اسداللهی، دیوید وندز و وینسنت ونین تشکر کنم. از شورای پژوهشی دانشگاه تهران نیز سپاسگزارم.

مراجع

- [1] A. A. Starobinsky, *Stochastic de Sitter (inflationary) stage in the early Universe*, *Lect. Notes Phys.* **246** (1986) 107–126.
- [2] H. Assadullahi, H. Firouzjahi, M. Noorbala, V. Vennin and D. Wands, *Multiple Fields in Stochastic Inflation*, *JCAP* **1606** (2016) 043, [[1604.04502](#)].
- [3] M. Noorbala, V. Vennin, H. Assadullahi, H. Firouzjahi and D. Wands, *Tunneling in Stochastic Inflation*, *JCAP* **1809** (2018) 032, [[1806.09634](#)].
- [4] V. Vennin, H. Assadullahi, H. Firouzjahi, M. Noorbala and D. Wands, *Critical Number of Fields in Stochastic Inflation*, *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017) 031301, [[1604.06017](#)].
- [5] H. Firouzjahi and M. Noorbala, *work in progress*.