

اثر واپاشی خودبخودی اتم دو ترازه بر حالت درهم تنیده اتم- فوتون در کاواک QED

سودا میرزائی

دانشگاه صنعتی سهند تبریز

چکیده

در این مقاله حالت درهم تنیده اتم-میدان تولید شده توسط مدل جینز-کامینگز را در نظر می‌گیریم و دینامیک افت درهم-تندگی در اثر گسیل خودبخودی اتم دو ترازه در کاواک QED را بررسی می‌کنیم. برای این منظور از سنجهی منفیت لگاریتمی استفاده خواهیم نمود.

درهم‌تندگی کوانتومی یکی از مشخصه‌های جالب مکانیک کوانتومی است که اساس مبانی اطلاعات کوانتومی را تشکیل می‌دهد. یک حالت از سیستم دو جزئی، درهم‌تنیده نامیده می‌شود هرگاه نتوان آن را بصورت ضرب تانسوری حالت دو زیرسیستم نوشت. برای اندازه‌گیری مقدار درهم‌تندگی سنجه‌های مختلفی وجود دارد. در مورد حالت دو جزئی آمیخته می‌توان از سنجه منفیت لگاریتمی استفاده نمود. اگر چه هم‌دوسی و درهم‌تندگی کوانتومی به عنوان یک منبع اساسی تلقی می‌شود ولی ناهم‌دوسی بواسطه اندرکنش سیستم با محیط یک مسئله غیر قابل انکار است. توسعه‌های اخیر در مطالعه رفتار مکانیک کوانتومی اتم‌ها و فوتون‌های منفرد، بررسی تجربی دینامیک ناهم‌دوسی بویژه دینامیک درهم‌تندگی در سیستم‌های باز را امکانپذیر کرده است.

توصیف مدل

یکی از مدل‌های حل پذیر مهم که نقش مهمی در اپتیک کوانتومی دارد، مدل جینز-کامینگز می‌باشد [۱]. این مدل اندرکنش یک اتم دو ترازه با میدان تک مد داخل کاواک است که با هامیلتونی زیر توصیف می‌شود:

$$H = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \omega a^\dagger a + \hbar \lambda (a^\dagger |g\rangle \langle e| + a |e\rangle \langle g|), \quad (1)$$

که λ ثابت جفت شدگی اتم-میدان، $a(a^\dagger)$ عملگر تولید (نابودی) میدان تک مد، ω_0 فرکانس گذار اتمی، ω فرکانس میدان و σ_z عملگر وارونی جمعیت اتم می‌باشد که در فضای هیلبرت اتم با بردارهای پایه $|g\rangle$ (حالت پایه) و $|e\rangle$ (حالت برانگیخته) بصورت $|g\rangle \langle g| - |e\rangle \langle e|$ تعریف می‌شود. با فرض بزرگ بودن ناکوکی فرکانس میدان و فرکانس گذار اتمی، هامیلتونی موثر عبارت خواهد بود از [۲]:

$$H = \hbar \chi (|e\rangle \langle e| + a^\dagger a \sigma_z), \quad (2)$$

بطوریکه $\chi = \frac{\lambda^2}{\Delta}$. فرض می‌کنیم سیستم اتم-میدان در ابتدا در حالت جداپذیر زیر باشد:

$$|\psi(0)\rangle_{af} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) \otimes |\alpha\rangle, \quad (3)$$

یعنی اتم در حالت برهم نهی از حالت پایه و برانگیخته و میدان کاواک در حالت هم‌دوس قرار دارد. در اینصورت حالت نهایی سیستم را در زمان t می‌توان بصورت زیر بدست آورد:

$$|\psi(t)\rangle_{af} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|g\rangle |\alpha e^{i\chi t}\rangle + e^{-i\chi t} |e\rangle |\alpha e^{-i\chi t}\rangle). \quad (4)$$

حالت بدست آمده یک حالت درهم‌تنیده می‌باشد می‌توان درهم‌تندگی آن را در زمان $\chi t = \frac{\pi}{2}$ با استفاده از آنتروپی خطی محاسبه نمود. برای هر سیستم دو کیوبیتی با ماتریس چگالی کاهش یافته $\rho_1 = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle \psi|)$ ، آنتروپی خطی با رابطه زیر داده می‌شود [۳]:

$$E_{Lin} = 2(1 - \text{Tr} \rho_1^2). \quad (5)$$

با فرض اینکه حالات همدوس $|i\alpha\rangle$ و $|-i\alpha\rangle$ مستقل خطی هستند و یک زیرفضای هیلبرت دوبعدی را جاروب می‌کند، داریم:

$$|0\rangle_f = |\alpha e^{i\alpha t}\rangle, |1\rangle_f = \frac{|\alpha e^{-i\alpha t}\rangle - p|\alpha e^{i\alpha t}\rangle}{\sqrt{1-p^2}}, \quad (6)$$

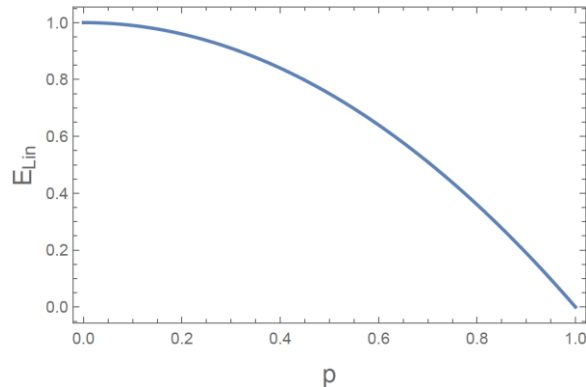
که $p = \langle i\alpha | -i\alpha \rangle$ و

$$|1\rangle_a = |e\rangle, |0\rangle_a = |g\rangle. \quad (7)$$

آنتروپی خطی بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$E_{Lin} = 1 - p^2. \quad (8)$$

در شکل ۱ نمودار تغییرات آنتروپی بصورت تابعی از پارامتر همپوشانی $p \in [0, 1]$ رسم شده است.



شکل ۱: آنتروپی خطی بر حسب p

نمودار نشان می‌دهد با افزایش دامنه میدان همدوس کاواک $\alpha \rightarrow \infty$ یعنی کاهش p ، درهم‌تنیدگی افزایش می‌یابد، عبارتی دامنه میدان کاواک را می‌توان به عنوان پارامتر کنترل درهم‌تنیدگی در نظر گرفت.

اثر واپاشی خودبخودی اتم بر درهم‌تنیدگی

در حالت درهم‌تنیده تولید شده بواسطه اندرکنش جینز-کامینگز رابطه‌ی (۴)، یکی از کیوبیت‌های جفت درهم‌تنیده متناظر با اتم دو ترازه با حالت پایه $|g\rangle$ و حالت برانگیخته $|e\rangle$ می‌باشد. دینامیک اتم با در نظر گرفتن واپاشی خودبخودی عبارتست از [۴]:

$$|g\rangle_a \otimes |0\rangle_E \rightarrow |g\rangle_a \otimes |0\rangle_E, \quad (9)$$

و

$$|e\rangle_a \otimes |0\rangle_E \rightarrow \sqrt{1-\eta}|e\rangle_a \otimes |0\rangle_E + \sqrt{\eta}|g\rangle_a \otimes |1\rangle_E. \quad (10)$$

که اندیس E معرف محیط بوده و برای یک اتم واپاشی کننده $\eta = 1 - e^{-\Gamma t}$ می‌باشد. رابطه (۹) نشان می‌دهد زمانیکه اتم در حالت پایه باشد، هیچ فوتونی در محیط وجود ندارد. رابطه (۱۰) مربوط به حالتی است که اتم در حالت برانگیخته بوده و محیط (میدان) در حالت خلا می‌باشد. در چنین شرایطی با احتمال η اتم واپاشی کرده و یک فوتون در محیط آزاد می‌شود و با احتمال $1-\eta$ در حالت اولیه باقی می‌ماند. با جایگذاری روابط (۹) و (۱۰) در رابطه (۴) و با تریس جزئی گرفتن نسبت به محیط E ، ماتریس چگالی کاهش یافته حالت اتم-میدان بصورت زیر بدست می‌آید:

$$\rho_{af} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ \rho_{21} & \rho_{22} & \rho_{23} & \rho_{24} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & \rho_{33} & \rho_{34} \\ \rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & \rho_{44} \end{pmatrix}, \quad (11)$$

که عناصر ماتریس در جدول آورده شده است:

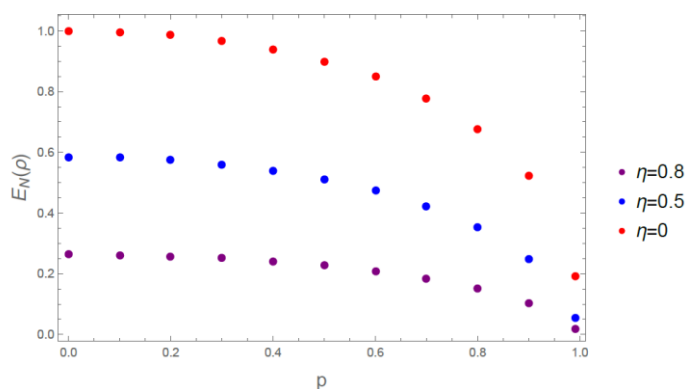
جدول ۱: عناصر ماتریس چگالی کاهش یافته ρ_{af} ، $(N = \sqrt{1-p^2})$

$\rho_{11} = 1 + \eta p^2$	$\rho_{12} = \rho_{21} = \eta p N$	$\rho_{13} = \rho_{31}^* = ip\sqrt{1-\eta}$
$\rho_{14} = \rho_{41}^* = iN\sqrt{1-\eta}$	$\rho_{22} = \eta N^2$	$\rho_{33} = p^2(1-\eta)$
$\rho_{44} = (1-\eta)N^2$	$\rho_{34} = \rho_{43} = pN(1-\eta)$	$\rho_{23} = \rho_{32} = \rho_{24} = \rho_{42} = 0$

مقدار درهم‌تنیدگی برای حالت آمیخته دو کیوبیتی را می‌توان با استفاده از سنجه منفیت لگاریتمی محاسبه نمود. این سنجه بصورت زیر تعریف شده است [۵]:

$$E_N = \text{Log}_2(2N(\rho) + 1), \quad (12)$$

بطوریکه $N(\rho) = \sum_i |\mu_i|$ می‌باشد که در آن μ_i ها، ویژه مقادیر منفی ترانهاد جزئی ماتریس چگالی اتم-میدان می‌باشد. رفتار درهم‌تنیدگی حالت اتم-میدان با در نظر گرفتن واپاشی خودبخودی اتم دوترانه بصورت تابعی از p و به ازای $\eta = 0$ ، $\eta = 0.5$ و $\eta = 0.8$ در شکل (۲) رسم شده است.



شکل ۲: منفیت لگاریتمی بصورت تابعی از p

نمودار نشان می‌دهد که با افزایش η یا عبارتی با واپاشی خودبخودی اتم در کاواک درهم‌تنیدگی کاهش می‌یابد. با گذشت زمان ($\eta = 1$) درهم‌تنیدگی اتم-میدان از بین رفته و یک حالت جداپذیر خواهیم داشت.

نتیجه گیری

در این مقاله با استفاده از مدل اپتیکی جینز-کامینگز حالت درهم‌تنیده اتم-فوتون تولید کرده و اثر واپاشی خودبخودی اتم در کاواک را روی درهم‌تنیدگی بررسی کردیم. منفیت لگاریتمی به عنوان سنجه‌ای برای اندازه گیری درهم‌تنیدگی حالت آمیخته دو کیوبیتی استفاده شد. نتایج نشان داد که اولاً دامنه میدان کاواک را می‌توان به عنوان پارامتر کنترل درهم‌تنیدگی در نظر گرفت. بعلاوه در اثر واپاشی خودبخودی اتم در کاواک، درهم‌تنیدگی اتم-فوتون کاهش یافته و در زمان‌های بالاتر، درهم‌تنیدگی از بین رفته و حالت اتم-فوتون تبدیل به حالت جداپذیر می‌شود.

مرجع‌ها

1. E.T. Jaynes and F.W. Cummings, "Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to beam maser", Proc. IEEE, vol. **51**, 89, (1963).
2. C. Gerry and P. Knight, "Introductory Quantum Optics", Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
3. Nicholas A. Peters, Tzu-Chieh. Wei, and Paul G. Kwiat, "Mixed state sensitivity of several quantum information benchmarks", Phys. Rev. A, vol. **70**, 052309, (2004).
4. L. Davidovich, "From quantum to classical: Schrodinger cats, entanglement, and decoherence", Phys. Scr, vol. **91**, 063013 (2016).
5. G. Vidal and R. F. Werner, "Computable measure of entanglement", Phys. Rev. A vol. **65** 032314 (2002).