

متریک کوودو به عنوان هندسه ی ترمودینامیکی همدیس

سید علی حسینی منصوری^۱

^۱دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی شاهرود، شاهرود

چکیده

در این مقاله، در ابتدا فرمولبندی جدیدی از هندسه ترمودینامیکی ارائه خواهیم داد که به درستی تطابق میان نقاط گذار و تکنیکی های خمش در آن مشهود است. سپس نشان می دهیم که متریک هندسی کوودو را می توان از تبدیل همدیس از این متریک ساخت. که این تابع همدیس علت ناهم خوانی در نقاط گذار فاز و نقاط تکنیکی حاصل از خمش هندسه کوودو را توضیح می دهد.

مقدمه

متریک های ترمودینامیکی از جمله متریک راپنیر [۱] و متریک وینهلد [۲] در مورد بسیاری از سیاهچاله ها در بیان تطابق میان نقاط گذار و نقاط تکنیکی خمش هندسی ناتوان هستند [۳، ۴]. علت این ناهمخوانی ناوردا نبودن چنین متریک های تحت تبدیلات لژاندر است. بنابراین کوودو^۱ متریک جدیدی [۵] معرفی کرد که تحت چنین تبدیلاتی ناوردا بماند و همچنین در توصیف تطابق نقاط گذار و تکنیکی توانا باشد. اما در برخی از سیاهچاله ها از جمله سیاهچاله فانتوم توصیف چنین دوگانگی با شکست روبه رو شد [۶، ۷]. لذا ما با ارائه ی فرمولبندی جدیدی از متریک راپنیر موفق به توصیف تطابق میان نقاط گذار و نقاط تکنیکی بری سیاهچاله فانتوم شدیم [۸، ۹]. اما سوالی که در اینجا ممکن است مطرح شود که چرا متریک کوودو ناتوان در توصیف این تطابق است؟ همچنین چه ارتباطی میان متریک ما و متریک کوودو وجود دارد. به نظر می رسد تبدیل همدیسی میان هر دو متریک وجود دارد که علت این ناهم خوانی را توجیه می کند. بنابراین در ابتدا نشان خواهیم داد که متریک ما توصیف درستی از نقاط گذار فاز را نشان می دهد و در ادامه علت ناهم خوانی متریک کوودو را با یافتن تبدیل همدیس بیان خواهیم کرد.

سیاهچاله باردار فانتوم در فضای پاددوسیه^۲

پتانسیل جرمی مربوط به این سیاهچاله با رابطه زیر داده می شود [۶].

$$M = \frac{1}{2}(S/\pi)^{3/2} \left(\frac{\pi}{S} - \frac{\Lambda}{3} + \frac{\eta\pi^2 Q^2}{S^2} \right) \quad (1)$$

در رابطه بالا S و Q به ترتیب آنتروپی و بارالکتریکی هستند و نیز Λ ثابت کیهانشناسی است. زمانی که مقدار $\eta = -1$ انتخاب شود، این حل مربوط به سیاهچاله فانتوم است ولی با انتخاب $\eta = 1$ جوابی برای سیاهچاله ریسرنردستروم پاددوسیه حاصل خواهد شد. با توجه به قانون اول ترمودینامیک برای این سیاهچاله $dM = TdS + \Phi dQ$ می توان دما، پتانسیل الکتریکی و نیز ظرفیت ویژه در بار الکتریکی ثابت را با روابط زیر به دست آورد.

$$T = \left(\frac{\partial M}{\partial S} \right)_Q = \frac{-\pi S + \Lambda S^2 + \eta\pi^2 Q^2}{-4(\pi S)^{3/2}}$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial M}{\partial Q} \right)_S = \frac{(S/\pi)^{3/2} \eta\pi^2 Q}{S^2} \quad (2)$$

$$C_Q = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_Q = \frac{-2S(-\pi S + \Lambda S^2 + \eta\pi^2 Q^2)}{(-\pi S - \Lambda S^2 + 3\eta\pi^2 Q^2)}$$

¹ Quevedo

² Phantom RN-AdS black hole

همچنین نقاط گذار مرتبه دوم در نقاط واگرایی ظرفیت گرمایی اتفاق می افتند (یعنی ریشه های مخرج ظرفیت گرمایی). به منظور یافتن چنین نقاطی از طریق هندسه ترمودینامیکی، با تعریف متریک جدیدی از راینیر به صورت

$$\bar{g}_{ij} = \frac{1}{T} \frac{\partial^2 \bar{M}}{\partial X^i \partial X^j} \quad (۳)$$

که در این رابطه $X^i = (S, \Phi)$ و نیز تابع آنتالپی $\bar{M}(S, \Phi) = M(S, Q(S, \Phi)) - \Phi Q(S, \Phi)$ تعریف شده- اند، می توان نشان داد که تکنیکی های مربوط به خمش $\bar{R}(S, \Phi)$ حاصل از این متریک دقیقاً در نقاط گذار $C_Q(S, Q(S, \Phi))$ اتفاق می افتند. با توجه به قانون اول ترمودینامیک برای آنتالپی، $d\bar{M} = TdS - Qd\Phi$ ، متریک بالا به شکل زیر نوشته می شود.

$$\bar{\mathbf{g}} = \frac{1}{T} \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_\Phi & \left(\frac{\partial T}{\partial \Phi}\right)_S \\ -\left(\frac{\partial Q}{\partial S}\right)_\Phi & -\left(\frac{\partial Q}{\partial \Phi}\right)_S \end{pmatrix} = \frac{\partial(T, -Q)}{T\partial(S, \Phi)} \quad (۴)$$

که درمیان آن با رابطه زیر به ظرفیت گرمایی در بار و آنتروپی ثابت، $C_S \equiv (\partial Q / \partial \Phi)_S$ ، مربوط خواهد شد [۹۸]

$$\begin{aligned} \bar{g} &= \det(\bar{\mathbf{g}}) = \det \left[\frac{\partial(T, -Q)}{T\partial(S, \Phi)} \right] = \det \left[\frac{\partial(T, -Q)}{T\partial(S, \Phi)} \frac{\partial(S, Q)}{\partial(S, Q)} \right] \\ &= \det \left[\frac{\partial(T, -Q)}{T\partial(S, Q)} \right] \det \left[\frac{\partial(S, Q)}{\partial(S, \Phi)} \right] = -\frac{C_S}{T^2 C_Q}. \end{aligned} \quad (۵)$$

از طرفی چون خمش اسکالر به صورت $\bar{R} \propto (\bar{g})^{-2}$ با درمیان متریک ارتباط دارد، لذا تطابق میان نقاط گذار فاز و نقاط تکنیکی به روشنی مشهود است یعنی $\bar{R} \propto C_Q$. از طرفی چون ظرفیت گرمایی در مختصات (S, Q) به دست آمده است. بهتر است با استفاده از ماتریس ژاکوبی به صورت زیر از مختصات (S, Φ) به مختصات (S, Q) برویم چرا که در این مختصات درستی اثبات بالا به سادگی قابل رصد است. البته لازم به ذکر است در بسیاری از موارد به- دست آوردن Q به عنوان تابعی از S و Φ بسیار سخت یا غیرممکن است.

$$\mathbf{J} \equiv \frac{\partial(S, \Phi)}{\partial(S, Q)} \quad (۶)$$

بنابراین متریک در مختصات جدید با رابطه زیر تعریف خواهد شد.

$$\bar{\mathbf{g}} = \left(\frac{\partial(S, \Phi)}{\partial(S, Q)} \right)^T \left(\frac{\partial(T, -Q)}{T\partial(S, \Phi)} \right) \left(\frac{\partial(S, \Phi)}{\partial(S, Q)} \right) = \left(\frac{\partial(S, \Phi)}{\partial(S, Q)} \right)^T \left(\frac{\partial(T, -Q)}{T\partial(S, Q)} \right) \quad (۷)$$

اکنون با توجه به روابط ماکسول $\left(\frac{\partial T}{\partial Q}\right)_S = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial S}\right)_Q$ و نیز استفاده از قانون اول، $dM = TdS + \Phi dQ$ ، شکل متریک نهایی که یک فرمولبندی جدید از ترمودینامیک هندسی است با رابطه زیر تعریف می شود.

$$g^{NTG} = \bar{\mathbf{g}} = \text{diag} \left(\frac{1}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_Q, -\frac{1}{T} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial Q}\right)_S \right) = \frac{1}{T} \text{diag} \left(\frac{\partial^2 M}{\partial S^2}, -\frac{\partial^2 M}{\partial Q^2} \right) \quad (۸)$$

بسیار جالب است که در ابتدا ما از تابع پتانسیل آنتالپی شروع کردیم ولی نهایتاً در فرمولبندی جدید تابع پتانسیل جرم $M(S, Q)$ است که می تواند ابزاری مناسب برای برقراری ارتباطی یک به یک میان نقاط گذار C_Q و نقاط تکنیکی R^{NTG} باشد. از سوی دیگر متریک کودو^۴ برای پتانسیل $M(S, Q)$ به صورت زیر تعریف می شود [۵].

³ New Thermodynamic Geometry(NTG)

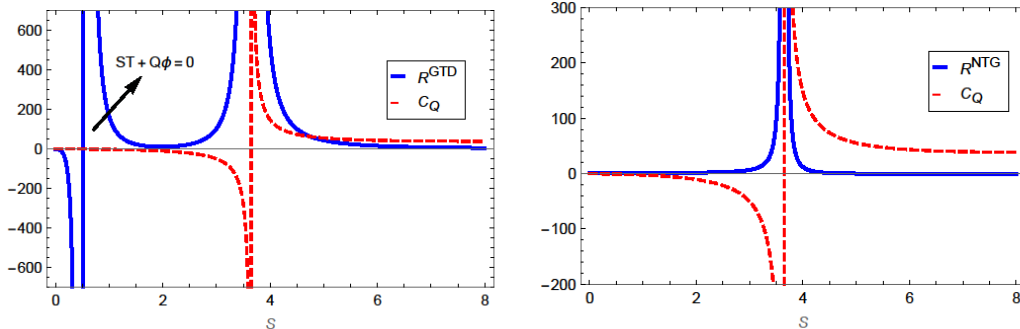
⁴ Geometrothermodynamics (GTD)

$$g^{GTD} = (ST + Q\Phi) \text{diag}\left(-\frac{\partial^2 M}{\partial S^2}, \frac{\partial^2 M}{\partial Q^2}\right) \quad (9)$$

اکنون با مقایسه دو رابطه (۸) و (۹) به سادگی می‌توان دید که متریک کوودو یک تبدیل همدیس از هندسه ترمودینامیکی جدید است یعنی،

$$(dl^{GTD})^2 = -T(ST + Q\Phi) dl_{NTG}^2 \quad (10)$$

از طرفی با توجه به اینکه برای دو متریک همدیس به صورت، $\bar{g}_{\mu\nu} = \Omega^2(x) g_{\mu\nu}$ ، خمش‌های اسکالر با، $\bar{R} \propto \Omega^{-2} R$ ، با یکدیگر ارتباط دارند، می‌توان نشان داد که ضریب همدیس نقاط تکینگی جدیدی را به خمش اضافه می‌کند. در واقع برای مورد کوودو نقاط تکینگی R^{GTD} هم شامل نقاط گذار C_Q و هم شامل ریشه‌های $ST + Q\Phi = 0$ هستند. در مورد ریشه‌های حد فرین یعنی $T = 0$ جای هیچ گونه نگرانی نیست زیرا طبق قانون سوم ترمودینامیک رسیدن به دمای صفر حداقل در گام‌های محدود غیرقابل رسیدن است. بنابراین می‌توان به این نکته اشاره نمود که به علت این نقاط تکینگی اضافی متریک کوودو در صورتی $ST + Q\Phi = 0$ دارای ریشه باشد ناتوان در توصیف تطابق میان نقاط گذار و نقاط تکینگی است و این درحالی است که فرمولبندی جدید از ترمودینامیک هندسی دارای چنین نقاطی نمی‌باشد. لذا ابزاری مناسب‌تری نسبت به دیگر هندسه‌های ترمودینامیکی به شمار می‌رود. برای در بهتر این موضوع در شکل (۱) برای سیاهچاله فانتوم با $Q = 0.25$ و $\Lambda = -1$ نمودار خمش دو متریک و نیز ظرفیت گرمایی برحسب آنتروپی رسم شده است.



شکل ۱: شکل سمت راست مربوط به خمش متریک جدید ترمودینامیک هندسی (R^{NTG}) و شکل چپ مربوط به خمش متریک کوودو (R^{GTD}) هستند. همانگونه که پیداست نقاط تکینگی خمش متریک هندسی جدید دقیقاً منطبق بر نقاط گذار C_Q است و این در حالی است که در مورد متریک کوودو نقاط تکینگی اضافه تری ناشی از تابع همدیس یعنی $ST + Q\Phi$ در شکل نشان داده شده است که برهانی بر عدم هم خوانی نقاط گذار و نقاط تکینگی است.

نتیجه گیری

در فرمولبندی جدید از ترمودینامیک هندسی خمش حاصل از تابع جرم یعنی $M(S, Q)$ دارای نقاط تکینگی است که دقیقاً نقاط گذار فاز C_Q را مشخص می‌کند. همچنین متریک کوودو تبدیلی همدیس از این متریک بشمار می‌رود و علت ناهم خوانی در نقاط گذار و نقاط تکین این متریک به ریشه‌های این تبدیل مرتبط می‌شود.

مرجع‌ها

- [1] F. Weinhold, Metric geometry of equilibrium thermodynamics, J. Chem. Phys. 63, 2479 (1975).
- [2] G. Ruppeiner, Thermodynamics: A Riemannian geometric model, Phys. Rev. A 20, 1608 (1979).
- [3] J. Aman, I. Bengtsson, and N. Pidokrajt, Geometry of black hole thermodynamics, Gen. Rel. Grav. 35, 1733 (2003).
- [4] T. Sarkar, G. Sengupta, and B. N. Tiwari, On the thermodynamic geometry of BTZ black holes, JHEP 0611, 015 (2006).
- [5] H. Quevedo, Geometrothermodynamics of black holes. Gen. Rel. Grav. 40, 971 (2008)
- [6] D.F. Jardim, M.E. Rodrigues, S.J.M. Houndjo, Thermodynamics of the phantom Reissner-Nordstrom-AdS black hole, Eur. Phys. J. Plus 27 (2012). [arXiv:1202.2830v2 [gr-qc]].
- [7] M.E. Rodrigues, Z.A.A. Oporto, Thermodynamics of phantom black holes in EinsteinMaxwell-dilaton theory. Phys. Rev. D 85(10), 104022 (2012) [arXiv:1201.5337].
- [8] S. A. Hoseeini Mansoori and Behrouz Mirza, Correspondence of phase transition points and singularities of thermodynamic geometry of black holes, Eur. Phys. J. C 74, 2681 (2014) [arXiv:1308.1543].
- [9] S. A. Hoseeini Mansoori and Behrouz Mirza, Mohamadreza Fazel, Hessian matrix, specific heats, Nambu brackets, and thermodynamic geometry, JHEP 04 (2015) 115, [arXiv:1411.2582].