Institute for Research in Fundamental Sciences
مقاله نامه ی بیست و ششمین کنفرانس بهاره فیزیک- ۲۲-۲۳ خرداد ماه ۱۳۹۸
شماره (۵)

آنتروپی درهم‌تنیدگی برای حالت پایه‌ی مدل فرمیون‌های آزاد بدون اسپین

محمدعلی جعفریزاده[1] ، فقیهه اقبالی فام[2]

[1]گروه فیزیک نظری و اخترفیزیک، دانشکده فیزیک، دانشگاه تبریز، تبریز

[2]دانشکده فیزیک، دانشگاه صنعتی ارومیه، ارومیه

چکیده

درهم‌تنیدگی یکی از مهم‌ترین ویژگی‌های مکانیک کوانتومی است که در قلب پردازش اطلاعات کوانتومی قرار دارد. درهم‌تنیدگی یک حالت خالص درهم‌تنیده، می تواند توسط سنجه‌ای به نام آنتروپی درهم‌تنیدگی اندازه‌گیری شود که با آنتروپی فون نویمن تعریف می‌شود در این مقاله، آنتروپی درهم‌تنیدگی برای هامیلتونی فرمیون‌های آزاد بدون اسپین بررسی می‌شود. در حالت پایه‌ی خالص، نحوه ی محاسبه ی آنتروپی درهم‌تنیدگی برای گراف‌های قویاً منظم با استفاده از ویژه-مقادیر ماتریس همبستگی داده شده و سپس از آنتروپی درهم‌تنیدگی به عنوان ابزاری در آشکار کردن جفت‌های غیرایزومورف از گراف‌های قویاً منظم استفاده شده است.

درهم‌تنیدگی کوانتومی خصوصیت حالات کوانتومی است که کاربرد وسیعی در تئوری اطلاعات کوانتومی و در کامپیوترهای کوانتومی دارد [۱]. محاسبه‌ی میزان درهم‌تنیدگی حالات کوانتومی یکی از مباحث مهم در زمینه‌ی همبستگی‌های کوانتومی است. برای هر سیستم دوقسمته در حالت خالص، می توان درهم‌تنیدگی سیستم را به عنوان آنتروپی فون نیومن هر کدام از دو قسمت تعریف کرد [۲]. مدل فرمیون‌های آزاد بدون اسپین، یکی از مدل‌هایی است که در بسیاری از تحقیقات در نظر گرفته می‌شود. پژوهش‌های متعددی در ارتباط با آنتروپی درهم‌تنیدگی در این مدل صورت گرفته است [۳و٤]. در مرجع [۵] نویسندگان با در نظر گرفتن هامیلتونین فرمیونی بدون اسپین، روش بدست آوردن ماتریس همبستگی و آنتروپی درهم‌تنیدگی را شرح داده اند. یکی از مباحث مربوط به نظریه‌ی گراف مساله‌ی یکریختی گراف‌ها است. دو گراف با تعداد یکسانی از رئوس و یال، غیریکریخت هستند، اگر با تغییر نامگذاری رئوس به هم تبدیل نشوند. مطالعه‌ی مساله‌ی یکریختی در گراف‌های قویاً منظم مساله‌ای جالب است زیرا گراف‌های غیریکریخت از این نوع به سختی از هم تشخیص داده می‌شوند. یکی از راه‌های تشخیص این گراف‌ها پیمایش کوانتومی است، اما پیمایش کوانتومی تک ذره و دو ذره قادر به تشخیص گراف‌های غیریکریخت از این نوع نیست [٦]. در مرجع [۷] مساله‌ی یکریختی گراف‌ها در گراف‌های قویا منظم با استفاده از آنتروپی درهم‌تنیدگی در حالت پایه‌ی گاوسی مدل نوسانگر هماهنگ بوزونی مورد بررسی قرار گرفته است و در این پژوهش آنتروپی درهم‌تنیدگی در یک مدل فرمیونی مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مدل فرمیون های آزاد بدون اسپین و محاسبه ی آنتروپی

مدل فرمیون‌های آزاد بدون اسپین با هامیلتونی زیر داده می‌شود

$$H=\sum_{i,j=1}^{N} c_i^{\dagger} V_{ij} c_j \qquad (۱)$$

که N تعداد سایت شبکه است و $c_i^{\dagger}$ و c_i عملگرهای خلق و فنای فرمیونی در سایت iام هستند که روابط پادجابجایی در مورد آن‌ها برقرار است و اتصالات آن‌ها با ماتریس پرش V_{ij} داده می‌شود که $V_{ij}=V_{ji}^{*}$.

تعداد فرمیون‌ها N_p است و عدد اشغال با $f=\frac{N_p}{N}$ داده می‌شود. این هامیلتونین پس از قطری شدن به شکل زیر می آید

$$H=\sum_{a=1}^{N} \epsilon_a d_a^{\dagger} d_a \qquad (۲)$$

که $d_a=\sum_{i=1}^{N}\psi_i^a c_i$. بنابراین حالت پایه‌ی این هامیلتونی برابر با $|\Psi^{N_p}\rangle=\prod_{a\in\tilde{B}} d_a^{\dagger}|0\rangle$ است که N_p تعداد ذرات در حالت پایه‌ی هامیلتونی است. در این پژوهش، ما فرض می‌کنیم که ماتریس پرش V در هامیلتونی بالا، با ماتریس همسایگی گراف دلخواه داده شود. توزیع طیفی ماتریس همسایگی A را می‌توان به شکل زیر نوشت

$$A=\epsilon_1 P_1+\epsilon_2 P_2+\ldots+\epsilon_d P_d \qquad (٣)$$

که در آن $\epsilon_1<\epsilon_2<\ldots<\epsilon_N$ ویژه‌مقادیر ماتریس همسایگی (و در واقع مقادیر انرژی هامیلتونی) هستند و P_i، عملگر تصویر به زیرفضای ویژه‌مقدار i ام است. فرض کنید m_i ها تبهگنی ویژه‌مقادیر ϵ_i باشد. در این صورت N_p فرمیون را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که $N_p=m_1+m_2+\ldots+m_{d'}$. یعنی فرمیون‌های انتخاب شده d' تراز انرژی از پایین‌ترین انرژی‌ها را پر می‌کنند. اگر فرمیون‌های انتخاب شده برای حالت پایه مجموعه‌ی $\tilde{B}$ را تشکیل دهند، ماتریس همبستگی از رابطه‌ی $C_{ij}^{\psi}=\langle\Psi^{N_p}|c_i^{\dagger}c_j|\Psi^{N_p}\rangle=\sum_{a,b=1}^{N}\psi_i^a\psi_j^b\langle\Psi^{N_p}|d_a^{\dagger}d_b|\Psi^{N_p}\rangle=\sum_{a\in\tilde{B}}\psi_i^a\psi_j^a$ بدست می‌آید که $i,j=1,\ldots,m$ است و m سایز زیرمجموعه‌ی B است. اکنون آنتروپی درهم‌تنیدگی بین زیرسیستم B و $\bar{B}$ که متمم آن است، با رابطه‌ی زیر داده می‌شود

$$S_B=-\sum_{i=1}^{m}(\lambda_i\log\lambda_i+(1-\lambda_i)\log(1-\lambda_i)) \qquad (٤)$$

که در آن λ_i ها ویژه مقادیر ماتریس همبستگی C هستند. اگر P_B عملگر تصویر به زیرفضای مربوط به زیرسیستم B باشد که زیرفضای $\mathcal{B}$ به صورت $span\{|i\rangle, i\in B\}$ است و $P_{\tilde{B}}$ عملگر تصویر به زیرفضای مربوط به زیرمجموعه‌ی $\tilde{B}$ (زیرمجموعه‌ی فرمیون‌های حالت پایه) باشد که زیر فضای $\tilde{\mathcal{B}}$ به صورت $span\{|b\rangle, b\in\tilde{B}\}$ است، در این صورت ماتریس همبستگی از رابطه‌ی $\Gamma=P_B P_{\tilde{B}} P_B$ بدست می‌آید و عناصر ماتریس همبستگی برابرند با $C_{ij}=\langle i|\Gamma|j\rangle$.

محاسبه‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی در گراف های قویاً منظم

گراف‌های قویاً منظم، با چهار پارامتر (N,κ,λ,μ) معرفی می‌شوند. این گراف‌ها در فضای لایه‌بندی سه لایه دارند که لایه‌ی اول یک راس، لایه‌ی دوم κ راس و لایه‌ی سوم $N-\kappa-1$ راس دارد. ماتریس همسایگی این گراف‌ها دارای سه نوع ویژه‌مقدار زیر است

$$x_1=\kappa, \qquad x_2,x_3=\frac{\lambda-\mu\pm\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(\kappa-\mu)}}{2} \qquad (٥)$$

بنابراین ویژه‌مقادیر انرژی هامیلتونی، سه نوع ویژه مقدار $\epsilon_1=x_3,\epsilon_2=x_2,\epsilon_3=x_1$ با تبهگنی‌های زیر است.

$$m_{x_1}=\kappa, \qquad m_{x_2},m_{x_3}=\frac{1}{2}\left((N-1)\pm\frac{2\kappa+(N-1)(\lambda-\mu)}{\sqrt{(\lambda-\mu)^2+4(\kappa-\mu)}}\right) \qquad (٦)$$

سه عملگر تصویر E_3,E_2,E_1 به سه ویژه‌مقدار مجزا از رابطه‌ی زیر محاسبه می‌شود.

$$E_1=\frac{(A-x_2I)(A-x_3I)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)}, \qquad E_2=\frac{(A-x_1I)(A-x_3I)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)}, \qquad E_3=\frac{(A-x_1I)(A-x_2I)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \qquad (٧)$$

در مثال‌هایی که ما در این بخش آنتروپی درهم‌تنیدگی را برای آن‌ها محاسبه خواهیم کرد، تعداد فرمیون‌ها را $N_p=m_{x_3}$ در نظر می‌گیریم و بنابراین عملگر تصویر به زیرفضای فرمیون‌ها برابر با $P_{\tilde{B}}=E_3$ خواهد بود. همچنین

برای محاسبه‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی مابین دو مجموعه‌ی متمم B و $\bar{B}$ در گراف، مجموعه‌ی B را مجموعه‌ی رئوس موجود در لایه‌ی دوم در نظر می‌گیریم.

مطالعه‌ی مساله‌ی یکریخت بودن گراف‌ها در دسته‌هایی از گراف‌های قویاً منظم غیر یکریخت

گراف‌های قویاً منظم غیریکریخت، پارامترهای (N,κ,λ,μ) یکسانی دارند، اما ماتریس همسایگی آن‌ها با تغییر نامگذاری رئوس نمی‌توانند به هم تبدیل شوند. در این بخش ما از آنتروپی درهم‌تنیدگی که برای مدل فرمیون‌های آزاد بدون اسپین ارائه کرده‌ایم، برای تشخیص گراف‌های قویاً منظم غیریکریخت استفاده می‌کنیم. نتایج ارائه شده در جدول ۱ به این شکل است که به عنوان مثال برای پارامترهای (۲۸،۱۲،۶،٤)، چهار گراف وجود دارد که مقادیر آنتروپی درهم‌تنیدگی برای این چهار گراف (اعداد ستون آخر از راست) همگی با هم متفاوت بدست آمده است و بنابراین هر چهار گراف غیریکریخت (اعداد ستون سوم از راست) تشخیص داده می‌شوند.

جدول۱ : مقادیر آنتروپی درهم‌تنیدگی برای خانواده‌هایی از گراف‌های قویاً منظم.

خانواده‌ی با پارامتر (N,κ,λ,μ)	تعداد گراف منتخب غیریکریخت در این دسته	تعداد گراف تشخیص داده شده در این دسته	مقادیر متفاوت آنتروپی درهم‌تنیدگی برای گراف‌های این دسته
(۲۵،۱۲،۵،٦)	۱۲	٦	٤/٩٣٤٠، ٤/٩٦١٣، ٤/٨٩٥٩، ٤/٩٧٥٢، ٤/٨٤٦٧، ٤/١٥٧٠
(۲٦،۱۰،۳،٤)	۱۰	٥	٤/٨٧٢٠، ٥/٠٠٠٥، ٥/٠١٦٣، ٥/٠٢٧٢، ٥/٠٢١٦
(۲۸،۱۲،٦،٤)	٤	٤	۳/٨٨٤٧، ۳/٨٥٧٥، ۳/٧۳١٤، ۳/٨٧٢٩
(۲۹،۱٤،٦،٧)	٤	٤	٥/٨٦٤١، ٥/٨٢٥٠، ٥/٨٣٥٧، ٥/٨٥٢٧
(۳٥،۱۸،۹،۹)	٥	٤	٦/۳۲۹٦، ٦/٦٨٨٧، ٦/٧۲۳٥، ٦/٧٧٥٠
(۳٦،۱٤،٤،٦)	٦	٤	٦/٧٧١۳، ٦/٦٤٥٠، ٦/٧۳٥٥، ٦/٦١١٩
(٤۰،۱۲،۲،٤)	۳	۳	٦/۲۳٨۳، ٦/۳٨٩٧، ٦/٥٤١٠
(٦٤،۱۸،۲،٦)	۲	۲	٨/٩٩٤٨، ٨/٦٢٤١

نتیجه گیری

در مدل فرمیون‌های آزاد بدون اسپین، نحوه‌ی محاسبه‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی با استفاده از عملگرهای تصویر برای شبکه‌های دلخواه توضیح داده شد. همچنین با استفاده از خصوصیات دسته‌ای از گراف‌ها به نام گراف‌های قویا منظم، روش محاسبه‌ی آنتروپی درهم‌تنیدگی برای این دسته از گراف‌ها شرح داده شد. سپس از آنتروپی درهم‌تنیدگی به عنوان ابزاری برای تشخیص گراف‌های غیریکریخت قویا منظم استفاده شده و نشان داده شد که آنتروپی درهم-تنیدگی ابزاری قدرتمند برای آشکارسازی دسته‌های غیریکریخت از این گراف‌هاست. گراف‌های قویاً منظم گراف-هایی با تقارن بالا هستند و با الگوریتم های کلاسیکی و کوانتومی به سختی آشکار می‌شوند.

مرجع‌ها

1. K. Mattle, H. Weinfurter, P. Kwiat and A. Zeilinger. *Phys. Rev. Lett*, **76**, 4656 -4659 (1997).
2. C. H. Bennett, H. J. Bernstein, S. Popescu and B. Schumacher. *Phys. Rev. A.* **53**: 2046-2052 (1996).
3. J. A. Carrasco, F. Finkel, A. G. Lopez and P. A. Tempesta. *Sci. Rep.-UK* **7** 11206(12), (2017).
4. J. M. Magan. *Phys. Rev. Lett.* **116**, 030401 (2016).
5. G. Gori, S. Paganelli, A. Sharma, P. Sodano and A. Trombettoni. *Phys. Rev. B* **91** 245138 (2015).
6. J. K. Gamble, M. friesen, D. Zhou, R. Joynt and S. N. Coppersmith. *Phys. Rev. A* **81**, 052313 (2010).
7. M. A. Jafarizadeh, F. Eghbalifam and S. Nami. *J. Stat. Mech.* P**08013** (2015).