مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

محاسبه نمای طول همبستگی برای شارش دو فازی در محیط متخلخل

دادی گیو، زهره

گروه علوم پایه دانشگاه صنعتی بیرجند، بیرجند

چکیده

نتایج شبیه سازی‌های به روش مونت -کارلو مدل تراوش تهاجمی با قانون به دام اندازی وبدون قانون به دام اندازی ارائه شده است. این نتایج عبارت‌اند از: تحلیل توزیع اندازه خوشه‌های به دام افتاده و منحنی پذیرش.

مقدمه

پدیده‌های شارش چند فازی در محیط متخلخل دارای اهمیت زیادی در بسیاری از حوزه های علم و صنعت است. برای بررسی این پدیده‌ها مدل‌های شبکه‌ای حفره‌ای برای بیان محیط متخلخل و مفاهیم نظریه تراوش برای مدل‌سازی شارش آرام شاره‌ها در فضای حفره‌ها استفاده می‌شود. این مدل‌ها تراوش بندی یا بستی [۲-۱] و تراوش تهاجمی (IP)[۶-۳] را شامل می‌شوند. در این مدل، شبکه ابتدا با سیالی که قرار است جابجا گردد و اغلب مدافع نامیده می‌شود، پر می گردد. سپس سیال جابجا کننده یا مهاجم به درون محیط تزریق می‌شود. دو نوع مختلف IP وجود دارد. در یکی از آنها مدافع یک سیال تراکم ناپذیر است. بنابراین اگریک حباب از آن توسط مهاجم احاطه شود، دیگر قابل نفوذ نبوده و گیر می افتد. در مدل دوم، مدافع تراکم پذیر فرض می‌شود؛ به طوری که حتی اگر یک حباب از آن توسط مهاجم احاطه گردد باز هم قابل نفوذ می‌باشد. این دو مدل را به ترتیب تراوش تهاجمی با قانون به دام اندازی (TIP) و تراوش تهاجمی بدون قانون به دام اندازی (NTIP) می‌نامند.

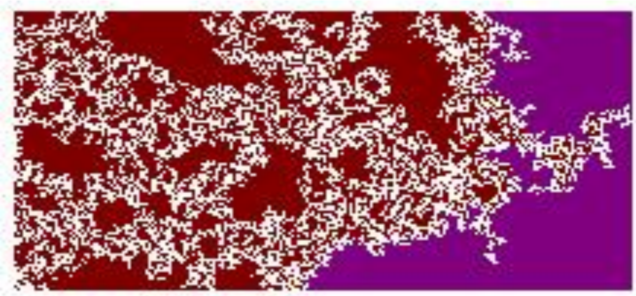
در این تحقیق مدل تراوش تهاجمی بستی را که برای زمانی که شارهٔ مهاجم نسبت به شارهٔ مدافع خاصیت مرطوب کنندگی بیشتری دارد و لذا به طور خود به خود به درون محیط متخلخل کشیده می‌شود، کاربرد دارد را در دو حالت با و بدون قانون به دام اندازی مورد بررسی قرار داده شده است .

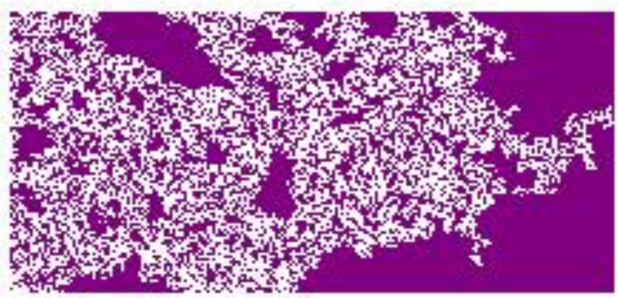
الگوریتم شبیه سازی

شبکه‌ای مربعی به اندازه $L\times 2L$ اختیار شده و به هر جایگاه شبکه یک عدد تصادفی که در بازه واحد $[0,1]$ توزیع شده است، نسبت داده می‌شود. در حالی‌که مهاجم یک لبه شبکه(مثلاً لبه سمت چپ) را پر کرده است. در هر گام زمانی مهاجم با جا به جا کردن مدافع از جایگاهی روی سطح مشترک که کمترین عدد تصادفی(مقاومت) را دارد رشد می‌یابد. در حالت TIP برای تشخیص تله‌ها از الگوریتم هوشن-کوپلمن استفاده شده است[۸]. این فرایند تا زمانی که مهاجم به لبه مخالف می‌رسد ادامه دارد. به این نقطهٔ خاتمه، نقطهٔ رسوخ[۹]می‌گویند. چون برای اولین بار خوشه مهاجم، شبکه را پرکوله می‌کند گویند یک گذار فاز رخ داده است و به این تک خوشه مهاجم، خوشهٔ گسترده شده در نمونه (SSC) نیز می‌گویند. لازم به ذکر است که در تمام محاسبات برای جلوگیری از اثر مرزها ناحیهٔ میانی شبکه مورد استفاده واقع شده است.

توزیع اندازه تله‌ها

خاصیت توپولوژیکی مهم دیگری از شبکه های تراوش میانگین تعداد خوشه های با اندازه s است. در تراوش تهاجمی شارهٔ مهاجم تنها در یک خوشه در امتداد مسیری با حداقل مقاومت رشد می‌یابد. بنابراین مهاجم هیچ‌گونه خوشه منفصلی تشکیل نمی‌دهد. اما تراوش تهاجمی با قانون به دام اندازی مجموعه‌ای از تله‌ها با ابعاد و شکل‌های مختلف تشکیل می‌دهد. این توزیع اندازه خوشه را برای خوشه های مدافع به دام افتاده روی شبکه مربعی رسم شده است (شکل ۲).





ب الف

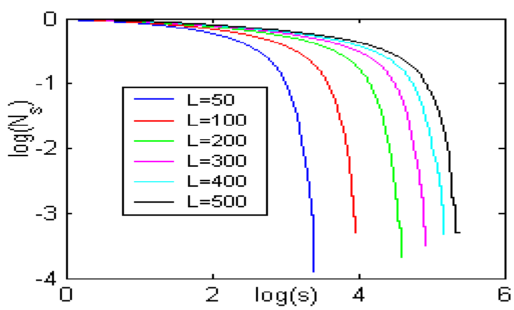
شکل ۱. نمونه‌ای از شبیه‌سازی روی شبکه مربعی به ابعاد ۴۰۰×۲۰۰ الف) NTIP ب) TIP. در این شکل رنگ سفید خوشهٔ مهاجم و رنگ قرمز خوشه‌های شارهٔ مدافع که به دام افتاده‌اند، می‌باشد و رنگ بنفش شارهٔ مدافعی که با خروجی ارتباط دارد، می‌باشد.

تعداد خوشه های با اندازه s، که اندازه خوشه عبارت است از تعداد کل جایگاههایی که آن خوشه را تشکیل می‌دهد، در حالت کلی رابطه زیر برای آن برقرار است :

$$n_s(s) \sim s^{-\tau} f\left(s/\langle s\rangle\right) \qquad (۱)$$

که $f(x)$ یک تابع مقیاس بندی است و s میانگین اندازه خوشه است که با رابطه زیر تعریف می‌شود:

$$\langle s\rangle = \frac{\sum s^2 n_s(s)}{\sum s n_s(s)} \qquad (۲)$$



شکل۲: نمودار توزیع خوشه‌های به دام افتاده N_s بر حسب اندازه خوشه s

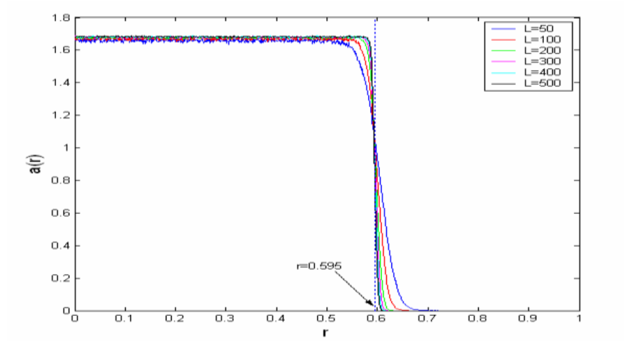
به خاطر انحرافات زیاد شکل‌های خوشه‌ها در میان نمونه های مختلف راه دقیق‌تر مطالعه آمار خوشه‌ها بررسی کردن $N_s(s)=\sum_{s>} sn_s$، میانگین تعداد کل خوشه های با اندازه‌ای بزرگتر از اندازه داده شده است[۹]. در حالت کلی انتظار می‌رود که:

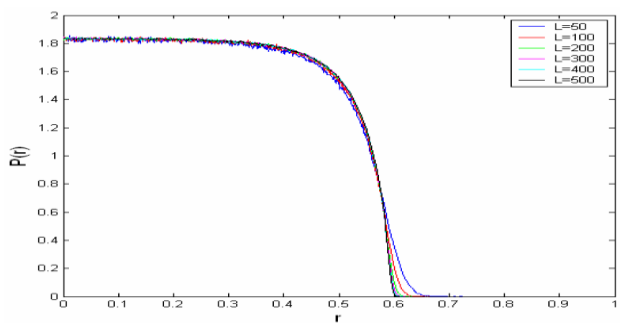
$$N_s(s) \sim s^{2-\tau} \qquad (۳)$$

نمای τ به نمای فیشر معروف است که با محاسبه شیب آن قسمت از نمودار که شبیه یک خط افقی است بدست می‌آید. برای بزرگترین شبکه‌ای که مورد مطالعه بوده، شیب این قسمت از نمودار ۰٫۰۳±۰٫۰۵ به‌دست می‌آید و در نتیجه $\tau = 2.05 \pm 0.03$. بنابراین برای این حالت رابطه $\tau = d/D_f + 1$ برقرار و با تراوش استاندارد نیز در توافق است.

نمودار پذیرش

برای تحلیل رشد در مدل تراوش تهاجمی نمودار پذیرش، a(r)، یک کمیت مفید است. این کمیت به صورت نسبت اعدا تصادفی که در بازه $[r, r+dr]$ داخل خوشه قرار دارند به تعداد اعداد تصادفی ایی که در این بازه موجودند، تعریف می‌شود[11]. برای رسم این نمودار ابتدا بازه $[0,1]$ به هزار قسمت تبدیل کرده و سپس عمل شمارش تعداد اعداد **تصادفی** در هر بازه انجام شده است. در شکل۳ نمودار پذیرش برای شبکه مربعی در حالت تراوش تهاجمی بدون قانون به دام اندازی و شکل٤ برای شبکه مربعی در حالت تراوش تهاجمی با قاانون به دام اندازی را نشان می-دهد.مشاهده می شود که دارای شکل پله ای می باشند و نمودارهای مربوط به اندازه های مختلف یکدیگر را در یک نقطه که همان آستانه تراوش معمولی می باشد، قطع می کنند.





شکل۳: نمودار پذیرش بر حسب عدد تصادفی برای شبکه مربعی در حالت **NTIP**

شکل٤: نمودار پذیرش بر حسب عدد تصادفی برای شبکه مربعی در حالت **TIP**

در همه این نمودارها یک وجه مشترک وجود دارد و آن این است که وقتی $L \to \infty$ کمیتهای

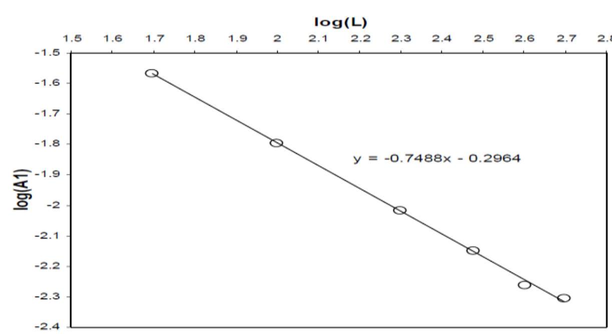
$$A_1(r) = \int_0^r \left(p_c^{-1} - a(\acute{r})\right) d\acute{r} \qquad (٤)$$

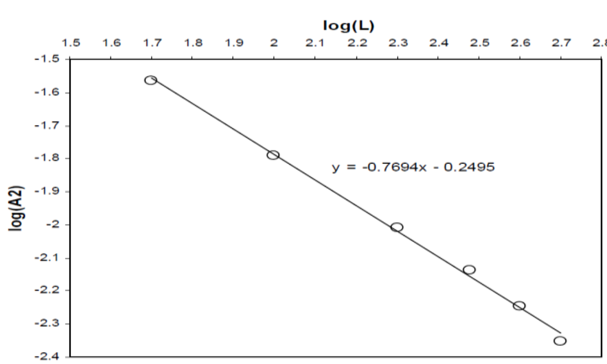
$$A_2(r) = \int_r^1 a(\acute{r}) d\acute{r} \qquad (٥)$$

به سمت صفر میل می کنند. در نقطه گذار این کمیتها از روابط توانی زیر تبعیت می کنند.

$$A_1(r) \sim L^{-\mu_1} \qquad , \qquad A_2(r) \sim L^{-\mu_2} \qquad (٦)$$

که در این حالت $\mu_1 = \mu_2$ و این مقدار مشترک را با μ نمایش میدهند که $\mu = \frac{1}{\vartheta}$ که ϑ نمای بحرانی طول همبستگی است. با استفاده از شکلهای(٥) و (٦) $\mu_1 = 0.75$ و $\mu_2 = 0.77$ و در نتیجه $\vartheta = 1.32$به دست آمده است. مشاهده می شود که با مقدار واقعی $\vartheta = \frac{4}{3}$ همخوانی خوبی دارد.





شکل۵: نمودار log A1(r) بر حسب log L برای شبکه مربعی در حالت NTIP شکل٦: نمودار **logA2(r)** بر حسب **log L** برای شبکه مربعی در حالت **NTIP**

نتیجه گیری

در این تحقیق نتایج شبیه سازی‌های عددی از خوشه‌های تراوش تهاجمی با و بدون قانون به دام اندازی بیان شد.. ایـن محاسـبات حـاکی از آن هسـتند که TIP و NTIP بستی در دو دسته مختلف عامیت قرار می‌گیرند. نمای بحرانی مربوط به توزیع خوشه در رابطه ابرمقیاس‌بندی $\tau = \frac{d}{D_f} + 1$ صدق و نمای طول همبستگی با مقدار واقعی همخوانی خوبی دارد.

مرجع‌ها

[1] D. Stauffer and A. Aharony; " *Introduction to Percolation Theory*"; 2nd edition, Taylor and Francis, London (1995).
[2] R. Chandler, J. Koplik, K. Lerman, and J.F. Willemsen, J. Fluid Mech. **119** (1982) 249-259.
[3] F. Ebrahimi, : Invasion percolation: A computational algorithm for complex phenomena. Computing in Science and Engineering (2010)84–93
[4] M. Sahimi,"Application of Percolation Theory"; Taylor and Francis(1994)
[5] H. Gould, J. Tobochnik, W. Christian, "*Introduction to Computer Simulation Methods*",3th edition, Benjamin Cummings (2006) 468-508.
[6] D. Wilkinson, J. Willemsen, J. Phys. A: Math. Gen. **16** (1983) 3365-3376.
[7] M. A. Knackstedt, M. Sahimi, A. P. Sheppard, Phys. Rev. E **61**, NO. 5 (2000) 4920-4934.
[8] J. Hoshen, R. Kopelman, Phys. Rev. B **14** (1976) 3438-3445
[9] J.J. Willemsen , Phys. Rev. Lett. **52** (1984) 2197-2200.
[10] A. Bunde ,S. Halvin , *"Fractals in Science*", Springer-Verlag(1996).
[11] D. Wilkinson, J. Willemsen, J. Phys. A: Math. Gen. **19** (1986) 3131-3146.