IPM
پژوهشگاه دانشهای بنیادی

شماره مقاله : ۸

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

روش ابرتقارنی در مکانیک کوانتومی نسبیتی

زهرا بخشی

گروه فیزیک، دانشکده علوم پایه، دانشگاه شاهد، تهران، ایران

چکیده

حل های معادله دیراک برای پتانسیل های الکترومغناطیسی با تقارن کروی با بکارگیری روش ابرتقارنی به عنوان یک روش جبری در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی بدست آید. در این مقاله تعدادی از سوپرپتانسیل ها وابسته به پتانسیل های حل پذیر در مکانیک کوانتومی غیر نسبیتی می توانند برای حل معادله دیراک بکار گرفته شوند.

در سال های اخیر تلاش های زیادی برای مطالعه معادلات موج نسبیتی و بررسی اثرات نسبیتی آنها صورت گرفته است که در این میان حل معادله دیراک به عنوان تعمیم نسبیتی این پتانسیل ها بسیار مورد توجه قرار گرفته است. این معادله برای بسیاری از پتانسیل ها مثل نوسانگر، مورس، کولن[📄📫📂] و .... به صورت دقیق حل شده است. در این مقاله روش ابرتقارنی در مکانیک کوانتومی را برای حل جبری معادله دیراک بکاررفته است [٤]. معادله دیراک در واحد اتمی برای اسپینور باردار در یک میدان الکترومغناطیسی چهار مولفه ای با تقارن کروی به صورت زیر است[٥]:

$$\begin{pmatrix} 1+\alpha^2 V(r) & \alpha(\frac{k}{r}+W(r)-\frac{d}{dr}) \\ \alpha(\frac{k}{r}+W(r)+\frac{d}{dr} & -1+\alpha^2 V(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(r) \\ F(r) \end{pmatrix} = \varepsilon \begin{pmatrix} G(r) \\ F(r) \end{pmatrix} \qquad (١)$$

که α ثابت ساختار ریز، ε انرژی نسبیتی و k جفت شدگی اسپین -مدار است. توابع شعاعی $V(r)$ و $W(r)$ به ترتیب پتانسیل الکتروستاتیکی و میدان پیمانه ای هستند. به منظور دست یابی به یک معادله شرودینگر گونه عملگر D به صورت زیر در نظرگرفته می شود:

$$D = \begin{pmatrix} \cos\rho(r) & \sin\rho(r) \\ -\sin\rho(r) & \cos\rho(r) \end{pmatrix} \qquad (٢)$$

با ضرب عملگر D در معادله (١) خواهیم داشت $\begin{pmatrix} \tilde{F}(r) \\ \tilde{G}(r) \end{pmatrix} = D \begin{pmatrix} F(r) \\ G(r) \end{pmatrix}$. با فرض $\rho(r) = cte$ [٥]:

$$[\frac{d}{dr} + (\frac{k}{r} + W(r))C + \frac{S}{\alpha}]\tilde{G} = [(\frac{\varepsilon}{\alpha} - \alpha V(r)) + (\frac{C}{\alpha} - (\frac{k}{r} + W(r))S)]\tilde{F}, \qquad (٣)$$

$$[-\frac{d}{dr} + (\frac{k}{r} + W(r))C + \frac{S}{\alpha}]\tilde{F} = [(\frac{\varepsilon}{\alpha} - \alpha V(r)) - (\frac{C}{\alpha} - (\frac{k}{r} + W(r))S)]\tilde{G}, \qquad (٤)$$

که در آن $C=\cos\rho(r)$ و $S=\sin\rho(r)$ می باشد. سپس عملگرهای نردبانی زیر را تعریف می کنیم [٦]:

$$A=\frac{d}{dr}+(\frac{k}{r}+W(r))C+\frac{S}{\alpha},\qquad A^{+}=-\frac{d}{dr}+(\frac{k}{r}+W(r))C+\frac{S}{\alpha}, \tag{۵}$$

در عملگرهای دیفرانسیل (۵) سوپرپتانسیلی به شکل زیر وجود دارد:

$$U(r)=(\frac{k}{r}+W(r))C+\frac{S}{\alpha}, \tag{٦}$$

معادلات (۳) و (٤) را می توانیم به صورت زیر بازنویسی کنیم:

$$A\tilde{G}(r)=(f_1+f_2)\tilde{F}(r),\qquad A^{+}\tilde{F}(r)=(f_1-f_2)\tilde{G}(r), \tag{۷}$$

که در آن $f_1=\frac{\varepsilon}{\alpha}-\alpha V(r)$ و $f_2=\frac{C}{\alpha}-(\frac{k}{r}+W(r))S$ می باشد. اگر طرف چپ معادلات (۷) را به ترتیب در A^{+} و A ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$AA^{+}\tilde{F}(r)=[A(f_1-f_2)]\tilde{G}(r)+(f_1-f_2)A\tilde{G}(r), \tag{۸}$$

$$A^{+}A\tilde{G}(r)=[A^{+}(f_1+f_2)]\tilde{F}(r)+(f_1+f_2)A^{+}\tilde{F}(r),$$

حال اگر فرض های زیر را در نظر بگیریم:

$$A^{+}(f_1+f_2)=0,\qquad A(f_1-f_2)=0, \tag{۹}$$

معادلات (۸) به شکل زیر بازنویسی می شود:

$$A^{+}A\tilde{G}(r)=(f_1^2-f_2^2)\tilde{G}(r),\qquad AA^{+}\tilde{F}(r)=(f_1^2-f_2^2)\tilde{F}(r), \tag{۱۰}$$

به سادگی معادلات (۹) نتیجه زیر را حاصل می کند:

$$f_1^2-f_2^2=constant\equiv\eta, \tag{۱۱}$$

برای A^+ و A داریم $H_1 = A^+ A$ که پتانسیل H_1 به سوپرپتانسیل $U(r)$ وابسته خواهد بود.

$$\upsilon_1 = U^2(r) - \frac{dU(r)}{dr}, \tag{۱۲}$$

با جابجا کردن عملگرهای A^+ و A هامیلتونی H_2 به صورت $H_2 = AA^+$ است و برای پتانسیل آن خواهیم داشت:

$$\upsilon_2 = U^2(r) + \frac{dU(r)}{dr}, \tag{۱۳}$$

این دو هامیلتونی دارای ویژه مقادیر یکسان می باشند که با یک پله اختلاف به ویژه حالت های جفت هامیلتونی نسبت داده می شود. بنابراین از معادله (۱۰) برای اسپینور پایین جفت هامیلتونی ها را به صورت زیر در نظرمی گیریم:

$$H_1 \tilde{G}^{(1)}_{n+1} = A^+ A \tilde{G}^{(1)}_{n+1} = E^{(1)}_{n+1} \tilde{G}^{(1)}_{n+1}, \qquad H_2 \tilde{G}^{(2)}_{n} = AA^+ \tilde{G}^{(2)}_{n} = E^{(2)}_{n} \tilde{G}^{(2)}_{n}, \tag{۱٤}$$

در معادلات (۱٤) داریم:

$$E^{(2)}_n = E^{(1)}_{n+1}, \qquad (n = 0,1,2,\ldots), \tag{۱۵}$$

H_1 و H_2 می توانند ماتریس هامیلتونی های ابرتقارنی را به شکل زیر ایجاد کنند:

$$H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & H_2 \end{pmatrix}, \tag{۱٦}$$

برای جفت هامیلتونی های ابرتقارنی (۱٤) براساس سوپرپتانسیل ***U(r)*** خواهیم داشت:

$$H_{1,2} = -\frac{d^2}{dr^2} + U^2(r) \mp \frac{dU}{dr}, \tag{۱۷}$$

اگر پتانسیل الکتروستاتیکی ***V(r)*** را معادل سوپرپتانسیل ***U(r)*** در نظر بگیریم، ***V(r)*** در رابطه زیر صدق می کند.

$$V(r) = (\frac{k}{r} + W(r))C + \frac{S}{\alpha}, \tag{۱۸}$$

با جایگذاری (۱۸) در رابطه (۱۱) و با فرض $\alpha = \pm \frac{S}{C}$ ویژه مقدار انرژی نسبیتی به صورت زیر بدست می آید:

$$\varepsilon_n = \pm\frac{1}{C}. \quad (۱۹)$$

برای این ویژه مقادیر $\eta = 0$ محاسبه می شود. در این کار به عنوان نمونه دو مثال را حل کرده ایم.

الف) دیراک – کولمب[۵]:

اگر سوپرپتانسیل کولمب را در این مسئله در نظر بگیریم، یعنی:

$$U(r) = \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{l+1}{r}, \quad (۲۰)$$

پتانسیل الکتروستاتیکی و میدان پیمانه ای به صورت زیر خواهد بود:

$$V(r) = \frac{e^2}{2(l+1)} - \frac{l+1}{r}, \qquad W(r) = \mp\frac{[2(l+1)^2 \pm e^2(l+1)]}{e^2}(\frac{1}{r}), \quad (۲۱)$$

برای $\alpha = \pm\frac{S}{C}$ و $\varepsilon_n = \pm\frac{1}{C}$ نسبت های پارامتری و انرژی نسبیتی به شکل زیر محاسبه می شود:

$$C = \pm\frac{e^2}{2(l+1)}, \qquad \varepsilon_n = \frac{2(l+1)}{e^2}. \quad (۲۲)$$

$$\tilde{G}_0^{(1)} = [(\frac{e^2}{n+l+1})r]^{(l+1)} \exp[-\frac{1}{2}(\frac{e^2}{n+l+1})r]. \quad (۲۳)$$

ب) دیراک– ایکارت[۵] :

برای سوپرپتانسیل ایکارت به صورت:

$$U(r) = \frac{B}{A} - A\coth(ar), \qquad B \succ A^2, \quad (۲٤)$$

پتانسیل الکتروستاتیکی و میدان پیمانه ای به صورت زیر خواهد بود:

$$V(r) = \frac{B}{A} - A\coth(ar), \qquad B \succ A^2, \qquad W(r) = \mp\frac{A^2}{B}\coth(ar) - \frac{k}{r}, \quad (۲۵)$$

برای $\alpha = \pm\frac{S}{C}$ و $\varepsilon_n = \pm\frac{1}{C}$ نسبت های پارامتری و انرژی نسبیتی به شکل زیر محاسبه می شود:

$$C = \pm\frac{B}{A}, \qquad \varepsilon_n = \frac{A}{B}. \tag{۲۶}$$

ویژه حالت پایه آن به صورت زیر است:

$$\tilde{G}_0^{(1)} = (\coth(ar)-1)^{\frac{-(s+n-\bar{a})}{2}}(\coth(ar)+1)^{\frac{-(s+n+\bar{a})}{2}}. \tag{۲۷}$$

نتیجه گیری:

پس از بکارگیری تبدیل یکانی معادله دیراک به معادله شرودینگر گونه تبدیل می شود. سپس از شرایط ابر تقارنی ایجاد شده استفاده کرده و نتایج مربوط به معادلات شرودینگر برای سوپرپتانسیل ها را با این هامیلتونی ها مطابقت داده و به محاسبه ویژه مقادیر انرژی، پتانسیل الکتروستاتیکی، میدان پیمانه ای و ویژه حالت ها می پردازیم.

مرجع‌ها:

[۱] M. Moshinsky and A. Szczepaniank , *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** (1989) L817.

[2] A. D. Alhaidari, *Phys. Rev. Lett* **87** (2001) 210405.

[3] R. de Lima Rodrigues*, Phys. Lett A* **326** (2004) 42.

[4] F. Cooper, A. Khare and U. Sukhatme*, Phys. Rep.* **251**(1995) 267.

[5] A. D. Alhaidari*, J. Phys. A: Math. Gen.* **35** (2002)6207.

[6] H. Panahi and Z. Bakhshi, Int. J. Theor. Phys. **50** (2011) 2811.