مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

بررسی ژئودزیک سیاهچاله متقارن کروی چرخان در گرانش همدیس

سبحان کاظم پور ، رضا صفاری ، صاحب سروش فر

گروه فیزیک ، دانشگاه گیلان ، رشت

چکیده:

در این مقاله معادلات ژئودزیک فضازمان سیاهچاله متقارن کروی چرخان در گرانش همدیس مورد بررسی قرار گرفته است. همچنین معادلات ژئودزیک برای حالات نورگونه و زمان‌گونه بصورت تحلیلی بر حسب توابع بیضوی وایرشتراس و ابر بیضوی سیگمای کلاینیان بدست آمده است.

متریک و معادلات ژئودزیک

شکل متریک سیاهچاله متقارن کروی چرخان در گرانش همدیس به‌صورت زیر می‌باشد[۱]

$$ds^2 = (B - N^2 \sin(\theta)^2)dt^2 + \left(\frac{-1}{B}\right)dr^2 + (-r^2)d\theta^2 + 2rN\sin\theta^2 dt\, d\Phi - r^2\sin\theta^2 d\phi^2 \qquad (۱)$$

$$B = a + \frac{1}{3}\frac{(a^2-1)}{br} + br + cr^2 \qquad (۲)$$

که در اینجا Λ ثابت کیهان‌شناختی $c = \frac{\Lambda}{3}$ وهمچنین $\frac{1}{3}\frac{(a^2-1)}{br} = \frac{m}{r}$ می‌باشد.

از معادله ژئودزیک زیر ، و شکل متریک (۱) می‌توان ثابت‌های حرکت را بدین صورت جدا سازی کرد[۲]و [۳]

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\varrho\sigma}\frac{dx^\varrho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \qquad l = \frac{1}{2}\, g_{\mu\nu}\frac{dx^\mu}{ds}\frac{dx^\nu}{ds} = \frac{1}{2}\epsilon \qquad (۳)$$

$$P_t = \frac{\partial L}{\partial \dot{t}} = -E \qquad P_\Phi = \frac{\partial L}{\partial \dot{\Phi}} = L \qquad P_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = \left(\frac{ds}{dr}\right) \qquad (٤)$$

ثابت E معرف انرژی و L معرف اندازه حرکت زاویه‌ای است. معادله هامیلتون–ژاکوبی را به‌صورت زیر داریم[۳] و [٤]و [۵]

$$2\frac{\partial S}{\partial \tau} = g^{ij}\frac{\partial S}{\partial x^i}\frac{\partial S}{\partial x^j} \qquad (۵)$$

$$S = \frac{1}{2}\epsilon\tau - Et + L_z\Phi + S_r(r) + S_\theta(\theta) \qquad (٦)$$

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

τ در اینجا پارامتر آفین در طول ژئودزیک ، و s معرف کنش می‌باشد [۵] .همچنین پارامتر ϵ در حالت $\epsilon = 1$ برای ژئودزیک زمان‌گونه و در $\epsilon = 0$ برای ژئودزیک نورگونه است. با جایگذاری معادله (٦)در (۵)خواهیم داشت

$$B^2\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = \epsilon\left(a+\frac{1}{3}\frac{a^2-1}{br}+br+cr^2\right)-E^2+\frac{\left(a+\frac{1}{3}\frac{a^2-1}{br}+br+cr^2-N^2\right)L^2}{r^2}+\frac{2NEL}{r}=0 \qquad (۷)$$

با معرفی وابستگی زمان مینو [۵] و زمان ویژه به صورت $(d\tau = r^2 d\lambda)$ معادله فوق به صورت زیر در می‌آید

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \epsilon cr^6+\epsilon br^5+(\epsilon a-E^2+cL^2)r^4+\left(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{b}+bL^2+2NEL\right)r^3+(aL^2-N^2L^2)r^2+\left(\frac{1}{3}\frac{(a^2-1)L^2}{b}\right)r = R_r \qquad (۸)$$

و با حل معادله بالا (۸) بر حسب E ، پتانسیل موثر را بدست می‌آوریم

$$V_{eff} = \frac{1}{3}\frac{3NLbr\pm\sqrt{3}\sqrt{rb(\epsilon r^2+L^2)(3bcr^3+3b^2r^2+3abr+a^2-1)}}{br^2} \qquad (۹)$$

حل تحلیلی معادلات ژئودزیک

برای بررسی بهتر وابستگی انواع ممکن مدارها به پارامترهای فضازمان، ازکمیت‌های بدون بعد استفاده می‌کنیم بنابراین با معرفی کمیت‌های بدون بعد $b = \frac{\tilde{b}}{m}$, $c = \frac{\tilde{c}}{m^2} = \frac{\Lambda}{3}$, $\tilde{L} = \frac{m}{L}$ معادله (۸) را به معادله زیر تبدیل می‌کنیم

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 = \epsilon\tilde{c}\tilde{r}^6+\epsilon\tilde{b}\tilde{r}^5+\left(\epsilon a-E^2+\tilde{c}\tilde{L}^2\right)\tilde{r}^4+\left(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{\tilde{b}}+\tilde{b}\tilde{L}^2+2NE\tilde{L}\right)\tilde{r}^3+\left(a\tilde{L}^2-N^2\tilde{L}^2\right)\tilde{r}^2+\left(\frac{1}{3}\frac{(a^2-1)\tilde{L}^2}{\tilde{b}}\right)\tilde{r} = R_{\tilde{r}} \qquad (۱۰)$$

برای $\epsilon = 1$ ، حالت زمانگونه معادله درجه ٦ داریم که با معرفی متغییر جدید $\tilde{r} = \frac{1}{u}$ معادله (۱۰) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\left(u\frac{du}{d\lambda}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\frac{(a^2-1)\tilde{L}^2}{\tilde{b}}\right)u^5+\left(a\tilde{L}^2-N^2\tilde{L}^2\right)u^4+\left(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{\tilde{b}}+\tilde{b}\tilde{L}^2+2NE\tilde{L}\right)u^3+\left(\epsilon a-E^2+\tilde{c}\tilde{L}^2\right)u^2+\epsilon bu+\epsilon c = \sum_{i=0}^{5} a_i u^i \qquad (۱۱)$$

حل معادله فوق بصورت زیر می‌باشد [۳]و [٤] و [۵]

$$u(\lambda) = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\lambda_\sigma) \qquad (۱۲)$$

در اینجا σ_i مشتق مرتبه i ام تابع سیگمای کلاینیان روبرو می‌باشد $\sigma(z) = Ce^{z^t kz}\theta[g,h](2\omega^{-1}z;\tau)$ که در آن c، مقداری ثابت، $g,h \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$ (که $\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$ مجموعه کاملی از بردارهای g بعدی صحیح یا نیمه صحیح (یعنی: $\ldots, \frac{3}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}$ و ...)است)،$\tau = \omega^{-1}\acute{\omega}$، ماتریس متقارن ریمانی، ماتریس $k = \eta(2\omega)^{-1}$ که ω، ماتریس دوره ای و η، ماتریس دوره ای نوع دوم است. θ تابع ریمانی با مشخصه $[g,h]$ به صورت $\theta[g;h](z;\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} e^{i\pi(m+g)^t(\tau(m+g)+2z+2h)}$ است در نتیجه جواب ژئودزیک زمان‌گونه بصورت زیر می‌باشد. [۳]

$$\tilde{r}(\lambda) = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\lambda_\sigma) \quad (۱۳)$$

برای $\epsilon = 0$ ، حالت نورگونه، معادله درجه ٤ داریم ($R(\tilde{r}) = \sum_{i=0}^{4} a_i \tilde{r}^i$) که با تغییر $\tilde{r} = \frac{1}{u}$ ، ، به چند جمله ای درجه ۳، ($R(u) = \sum_{i=0}^{3} b_i u^i$) تبدیل و با جانشینی $u = \frac{1}{(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{\tilde{b}}+\tilde{b}\tilde{L}^2+2NE\tilde{L})}\left(4y - \frac{(\epsilon a - E^2+\tilde{c}\tilde{L}^2)}{3}\right)$ (که درآن $(\tilde{r}_R)$ $b_j = \frac{1}{(4-j)!}\frac{d^{(4-j)}R}{d\tilde{r}^{(4-j)}}$)، به شکل وایرشتراس زیر تبدیل می شود

$$\left(\frac{dy}{d\lambda}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 = p_3(y) \quad (۱٤)$$

که در اینجا g_2 و g_3، ناورداهای وایرشتراس به صورت زیر می باشند

$$g_2 = \frac{1}{16}\left(\frac{4}{3}\left(\epsilon a - E^2 + \tilde{c}\tilde{L}^2\right)^2 - 4(\epsilon b)\left(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{\tilde{b}} + \tilde{b}\tilde{L}^2 + 2NE\tilde{L}\right)\right) \quad , \quad g_3 = \frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}(\epsilon b)(\epsilon a - E^2 + \tilde{c}\tilde{L}^2)\left(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{\tilde{b}} + \tilde{b}\tilde{L}^2 + 2NE\tilde{L}\right) - \frac{2}{27}\left(\epsilon a - E^2 + \tilde{c}\tilde{L}^2\right)^3 - (\epsilon c)\left(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{\tilde{b}} + \tilde{b}\tilde{L}^2 + 2NE\tilde{L}\right)^2\right) \quad (۱٥)$$

معادله دیفرانسیل (١٤) از نوع بیضوی است و بر حسب توابع وایرشتراش حل شده است[٤]و[٦]

$$y(\varphi) = \wp(\lambda - \lambda_{in}; g_2; g_3) \quad (۱٦)$$

که در آن $\lambda_{in} = \lambda_0 + \int_{y_0}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$ ، $\lambda_0 = \frac{1}{4}\left(\frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{\tilde{b}}+\tilde{b}\tilde{L}^2+2NE\tilde{L}\right)}{r_0} + \frac{(\epsilon a - E^2 + \tilde{c}\tilde{L}^2)}{3}\right)$ در نتیجه حل معادله (۹) به صورت زیر می باشد

$$r(\lambda) = \frac{\left(\frac{1}{3}\frac{\epsilon(a^2-1)}{\tilde{b}}+\tilde{b}\tilde{L}^2+2NE\tilde{L}\right)}{4\wp(\lambda-\lambda_{in};g_2;g_3) - \frac{(\epsilon a - E^2+\tilde{c}\tilde{L}^2)}{3}} \quad (۱۷)$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله معادلات ژئودزیک فضازمان سیاهچاله متقارن کروی چرخان در گرانش همدیس مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از معادلات اویلر- لاگرانژ و هامیلتون - ژاکوبی ثابت‌های حرکت بدست آمده است و معادلات ژئودزیک برای حالات نورگونه و زمان‌گونه بصورت تحلیلی بر حسب توابع بیضوی وایرشتراس و ابر بیضوی سیگمای کلاینیان بدست آمده است . همچنین با استفاده از پتانسیل موثر و حل تحلیلی بالامی‌توان مدارهای حرکت ژئودزیکی که امکان وجود دارند را رسم کرد.

مرجع‌ها

[۱] S. Dastan, A. Farokhtabar, M. A. Ganjali1, B. Hosseini , *European Online Journal of Natural and Social Sciences*, **Vol.3, No.4 pp. 892-896** (2014)
[۲]S.Qing Wu, G-Ming Deng, D. Wu, *arXiv*:**1401.1599v2 [gr-qc]** 22 Jul (2014)
[۳] E. Hackmann, V. Kagramanova, J. Kunz and C. Lammerzahl, *Phys. Rev. D* **78**, 124018 (2008).
[۴] E. Hackmann and C. Lammerzahl, *Phys. Rev. D* **78**, 024035 (2008).
[۵] Hackmann , E . " *Geodesic equations in black hole space-times with cosmological constant* " Ph.D dissertation, university Bremen,(2010)

[۶] M. Abramowitz and I. E. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications,New York,(1968).