مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

حل ژئودزیک سیاهچاله رایسنرنوردستروم ریسمان شده در ابعاد بالاتر

مجتبی حق‌شناس، رضا صفاری، صاحب سروش‌فر

گروه فیزیک، دانشگاه گیلان، رشت

چکیده

در این مقاله، حرکت ژئودزیک ذرات در فضازمان اطراف یک سیاهچاله راسینرنوردستروم ریسمان شده در ابعاد بالاتر را بررسی می‌کنیم. ابعاد مورد نظر در این مقاله شامل هفت بعد می‌باشند. برای بدست آوردن معادلات حرکت، از روش اویلر لاگرانژ و همچنین برای حل تحلیلی معادلات ژئودزیک از توابع ابربیضوی سیگمای کلانیان استفاده می کنیم.

معادله ژئودزیک سیاهچاله رایسنرنوردستروم ریسمان شده در ابعاد بالاتر

می‌توان معادله ی ژئودزیک مربوطه را به شکل کلی زیر نمایش داد که در آن پارامتر d نشان دهنده تعداد بعد فضا-زمان مورد بررسی می‌باشد

$$ds^2 = f(r)dt^2 - f(r)^{-1}dr^2 - r^2 d\Omega_{d-2}^2 + d\omega^2 \tag{۱}$$

$$f(r) = 1 - (\frac{r_s}{r})^{d-3} - (\frac{q}{r})^{2(d-3)} \tag{۲}$$

که در این معادله داریم $r_s = 2M$، $d\Omega_1^2 = d\varphi^2$ و $d\Omega_{i+1}^2 = d\theta_i^2 + \sin^2\theta_i d\Omega_i^2$ که $i >= 1$ می‌باشد.[۱و۲]

لاگرانژی یک ذره در فضا - زمان (۱) به صورت زیر است

$$l = \frac{1}{2} g_{\mu\upsilon} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\upsilon}{ds} = \frac{1}{2}\ \varepsilon \tag{۳}$$

مقدار ε برای ذرات جرم دار یک و برای نور برابر صفر است. همچنین به علت وجود تقارن کروی می توان محاسبات را در حالت خاص $\theta = {}^{\pi}/_{2}$ در نظر گرفت و نتایج بدست آمده را برای مناطق دیگر تعمیم داد. حال با استفاده از معادله‌ی اویلر لاگرانژ ثوابت حرکت (تکانه زاویه ای و انرژی) به صورت زیر بدست می آید

$$\frac{\partial l}{\partial \dot\varphi} = L = r^2 \frac{d\varphi}{ds} \qquad \frac{\partial l}{\partial \dot t} = E = -f(r)\dot t \qquad \frac{\partial l}{\partial \dot\omega} = \dot\omega = J\, z \tag{٤}$$

با جایگذاری روابط (٤) در معادله‌ی (۱) به معادله‌ی صریحی برای $\frac{dr}{ds}$ می‌رسیم

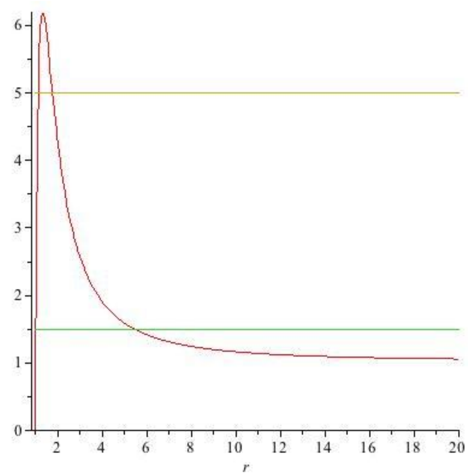
$$(\frac{dr}{ds})^2 = E^2 - f(r)(\varepsilon + \frac{L^2}{r^2} + J^2) \tag{٥}$$

حال باتوجه به رابطه‌ی (۵) و قرار دادن مقدار E برابر صفر می‌توانیم معادله‌ی پتانسیل موثر را به صورت زیر نوشت

$$V_{eff} = \left(1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^{d-3} - \left(\frac{q}{r}\right)^{2(d-3)}\right)\left(\frac{L^2}{r^2} + \varepsilon + J^2\right) \qquad (٦)$$

با استفاده از روابط زیر و جاگذاری آن در معادلات (۵) و (٦) آن ها را بدون بعد کرده و سپس قادر خواهیم شد نمودارهای مربوط به پتانسیل موثر را رسم کرد

$$\mu = E^2 \qquad \tilde{L} = \frac{r_s^2}{L^2} \qquad \tilde{r} = \frac{r}{r_s} \qquad \eta = \frac{q^2}{r_s^2} \qquad (۷)$$



شکل۱: نمودار پتانسیل موثر در ۷ بعد $(\eta = 0.7 \;\; L = 0.07 \;\; J = 0.15)$

رابطه‌ی (۵) را می‌توان با استفاده از روابط (٤) و (۷) برای $\frac{dr}{d\varphi}$ به صورت زیر بازنویسی نمود

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\varphi}\right)^2 = \left(\tilde{L}\mu - \tilde{L}\varepsilon - \tilde{L}J^2\right)\tilde{r}^4 - \tilde{r}^2 + \left(\tilde{L}\varepsilon\eta^{d-3} + \tilde{L}J^2\eta^{d-3}\right)\tilde{r}^{10-2d} + \eta^{d-3}\tilde{r}^{8-2d} + \left(\tilde{L}\varepsilon + \tilde{L}J^2\right)\tilde{r}^{7-d} + \tilde{r}^{5-d}$$

(۸)

حال با تغییر متغیر $u=\frac{1}{\tilde{r}^2}$ و همچنین با قرار دادن مقدار d برابر ۷ خواهیم داشت:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 4u\left[\left(\tilde{L}\mu - \tilde{L}\varepsilon - \tilde{L}J^2\right) - u + \left(\tilde{L}\varepsilon + \tilde{L}J^2\right)u^2 + u^3 + \left(\tilde{L}\varepsilon\eta^4 + \tilde{L}J^2\eta^4\right)u^4 + \eta^4u^5\right] = 4P(5) \qquad (۹)$$

حل تحلیلی معادلات ژئودزیک

معادله حرکت (۹) به یک معادله درجه پنج تبدیل می شود که جواب این معادله تابع ابر بیضوی سیگمای کلانیان است و حل این معادله به صورت زیر می باشد[۳و٤]

$$u(\varphi) = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(\varphi_\sigma) \qquad (۱۰)$$

در اینجا σ_i، مشتق مرتبه i ام تابع سیگمای کلاینیان زیر می باشد

$$\sigma(z) = Ce^{z^t kz}\theta[g,h](2\omega^{-1}z;\tau) \qquad (۱۱)$$

C مقداری ثابت، $g,h \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$ ($\frac{1}{2}\mathbb{Z}^g$ مجموعه کاملی از بردارهای g بعدی صحیح یا نیمه صحیح است)، $\tau = \omega^{-1}\acute{\omega}$، ماتریس متقارن ریمانی و ماتریس $k = \eta\,(2\omega)^{-1}$ که ω ماتریس دوره ای و η ماتریس دوره ای نوع دوم است. θ تابع ریمانی با مشخصه $[g,h]$ به صورت زیر است[۱۰و ۱۱].

$$\theta[g;h](z;\tau) = \sum_{m\in\mathbb{Z}^g} e^{i\pi(m+g)^t(\tau(m+g)+2z+2h)} \qquad (۱۲)$$

بنابراین حل تحلیلی معادله (۱۳) برای ژئودزی های زمان گونه به صورت زیر است

$$\tilde{r}(\varphi) = -\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(\varphi_\sigma) \qquad (۱۳)$$

نتیجه‌گیری

در این مقاله ژئودزیک فضا زمان یک سیاهچاله رایسنرنوردستروم ریسمان شده در ابعاد بالاتر مورد بررسی قرار گرفت و از طریق روش اویلر لاگرانژ معادله‌ی حرکت حل و پتانسیل موثر محاسبه و رسم شد و همچنین با استفاده از تابع ابر بیضوی سیگمای کلانیان معادلات حرکت به صورت تحلیلی حل گردید. نتایج بدست آمده از این مقاله می توانند ابزاری مفید برای محاسبه دقیق مدارها و کاربردهای آنها باشند. از همین روش می‌توان برای بررسی فضا زمان‌های دوسیته، آنتی‌دوسیته در ابعاد بالاتر نیز استفاده نمود.

مرجع‌ها

[1].E.Hackmann, V.Kagramanova, J.Kunz, and C.Lammerzahl, phys. Rev. D 78,124018(2008)

[2]. S.Grunau, B.Khamesra,phys. Rev.D 87,124019 (2013)

[3]. E.Hackmann and C.Lammerzahl, phys.Rev.D 78,024035 (2008)

[4].V.Z.Enolski, E.Hackmann,V.Kagrammanova,J.Kuntand,C.Lammerzahl.phys.61,899(2011)