مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

آنتروپی سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته و فرمول کاردی- ورلینده

محسن دهقانی کاظمی

ایلام، دانشگاه ایلام

چکیده

فرمول کاردی- ورلینده آنتروپی یک میدان متقارن همدیس را به انرژی کل و انرژی کازیمیر آن در یک فضای d –بعدی مرتبط می کند. در این مقاله پس از معرفی اجمالی فرمول کاردی- ورلینده و سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته، ترمودینامیک این سیاهچاله در افق حادث بررسی و نشان داده شده است که آنتروپی در افق حادث سیاهچاله با فرمول کاردی- ورلینده سازگار است به شرط آنکه در محاسبه جرم سیاهچاله از توصیف ارئه شده توسط ابوت و دزر استفاده شود. همچنین از بررسی ترمودینامیک در افق کیهان شناسی نشان داده شده است که اگر از جرم توصیف شده توسط مینیک و همکارانش استفاده شود آنتروپی در افق کیهان شناسی با فرمول کاردی- ورلینده سازگار خواهد بود.

۱- مقدمه: سیاهچاله‌ها را می توان به عنوان سیستمهای ترمودینامیکی در نظر گرفت که از قوانین ترمودینامیکی مشخصی موسوم به قوانین ترمودینامیک سیاهچاله‌ها تبعیت می کنند. از سال ۱۹۷٤ که استفان هاوکینگ اولین مقاله خود را در مورد ویژگیهای سیاهچاله‌ها منتشر کرد[۱]، تا کنون تلاشهای بسیار زیادی در این مقوله صورت گرفته و این مسئله همچنان در کانون توجه محققین قرار دارد [۲و۳]. از طرف دیگر داده های رصدی اخیر وجود یک ثابت کیهان شناسی مثبت را تایید کرده است. بنابراین بررسی ترمودینامیک سیاهچاله ها در فضا-زمان دوسیته و فضا-زمان هایی که مجانباً دوسیته هستند از اهمیت ویژه ای برخوردار است.

سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته $(D+2)$ –بعدی یک جواب معادله میدان اینشتین در حضور ثابت کیهان شناسی $\Lambda=\frac{D(D+1)}{2L^2}$ است و با متریک زیر مشخص می شود

$$ds^2=-f(r)\,dt^2+f(r)^{-1}dr^2+r^2d\Omega_D{}^2 \qquad \text{و} \qquad f(r)=1-\frac{\omega_D M}{r^{D-1}}-\frac{r^2}{L^2} \tag{۱}$$

که در آن و $\omega_D=\frac{16\pi G}{DV_D}$، G ثابت گرانش در $(D+2)$–بعد و L شعاع انحنای فضای دوسیته و V_D نشان دهنده حجم کره $d\Omega_D^2$، M نیز یک ثابت انتگرالگیری است. $f(r)=0$ دارای دو ریشه مثبت است. ریشه بزرگ تر را افق کیهان شناسی (r_c) و ریشه کوچکتر را افق حادث (r_e) سیاهچاله می نامند.

آنتروپی یک میدان متقارن همدیس در فضای $(1+1)$–بعدی با استفاده از رابطه مشهور کاردی مشخص می شود

$$S_{CFT}=\sqrt{\frac{c}{6}\left(L_0-\frac{c}{24}\right)},\qquad (۲)$$

که در آن $L_0=ER$ حاصل ضرب انرژی در شعاع و جابجایی $\frac{c}{24}$ ناشی از اثر کازیمیر است [٤]. معادله (۲) با تعریف مناسب L_0 و c در فضای $(D+1)$–بعدی به صورت زیر معتبر است [٥]

$$S_{CFT}=\frac{2\pi R}{D}\sqrt{E^C\left(2E-E^C\right)},\qquad (۳)$$

که در آن E انرژی کل و E^C انرژی کازیمیر است و به صورت $E^C=(D+1)E-DTS$ تعریف می شود. معادله (۳) فرمول کاردی- ورلینده نامیده می شود.

لازم به ذکر است که فرمول کاردی- ورلینده برای فضا-زمان هایی که مجابتاً تخت هستند به صورت زیر در می آید

$$S_{CFT}=\frac{2\pi R}{D}\sqrt{2E^CE}.\qquad (٤)$$

برای محاسبه بارهای پایستار فضا- زمان هایی که مجانباً دوسیته هستند دو روش وجود دارد. روش اول مبتنی بر توصیف ابوت و دزر است [٦]. در این توصیف جرم گرانشی فضا- زمان هایی که مجانباً دوسیته هستند همواره مثبت ودر غیاب ثابت کیهان شناسی با جرم گرانشی فضا- زمان های مجانباً تخت برابر است. روش دوم مبتنی بر توصیفی است که مینیک و همکارانش ارائه کرده اند [۷]. بر این اساس جرم گرانشی سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته منفی است.

در این مقاله هدف اصلی پاسخ به این پرسش است که آیا آنتروپی سیاهچاله هایی که مجانباً دوسیته هستند را می توان به وسیله فرمول کاردی- ورلینده توصیف کرد؟ برای پاسخ دادن به این پرسش ترمودینامیک سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته $(D+2)$–بعدی را به صورت جداگانه در افق حادث و افق کیهان شناسی بررسی کرده و نتیجه حاصل را با فرمول کاردی- ورلینده مقایسه می کنیم.

۲- ترمودینامیک در افق حادث سیاهچاله

آنتروپی در افق حادث سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته $(D+2)$–بعدی عبارت است

$$S_e = \frac{r_e^D V_D}{4G} = \frac{4\pi\, r_e^D}{D\omega_D}. \tag{۵}$$

با استفاده از توصیف ارائه شده توسط ابوت و دزر[٦] جرم گرانشی این سیاهچاله مثبت بوده و با استفاده از $f(r_e)=0$ داریم

$$E_e = M = \frac{r_e^{D-1}}{\omega_D}\left(1-\frac{r_e^2}{L^2}\right), \tag{٦}$$

و با استفاده از معادلات (۵) و (٦) می توان نوشت

$$dS_e = \frac{4\pi\, r_e^{D-1}}{\omega_D} dr_e, \tag{۷}$$

$$dE_e = \frac{r_e^D}{\omega_D}\left[\frac{(D-1)}{r_e^2} - \frac{(D+1)}{L^2}\right] dr_e. \tag{۸}$$

با استفاده از رابطه ترمودینامیکی $dE = TdS$ پس از اندکی محاسبه سر راست می توان نوشت

$$T_e = \frac{1}{4\pi\, r_e}\left[(D-1)-(D+1)\frac{r_e^2}{L^2}\right]. \tag{۹}$$

انرژی کازیمیر در افق کیهان شناسی که به صورت $E_e^C = (D+1)E_e - DT_eS_e$ تعریف می شود عبارت است از

$$E_e^C = \frac{2Dr_e^{D-1}}{16\pi G} V_D = \frac{2}{\omega_D} r_e^{D-1}, \tag{۱۰}$$

که در آن از معادلات (۵)، (۸) و (۹) استفاده شده است. اینک با استفاده از معادلات (٦) و (۱۰) داریم

$$2E_e - E_e^C = -\frac{2Dr_e^{D+1}}{16\pi GL^2} V_D = -\frac{2}{L^2\omega_D} r_e^{D+1}. \tag{۱۱}$$

با استفاده از معادلات (۱۰) و (۱۱) معادله (۵) را می توان به صورت زیر نوشت

$$S_e = \frac{2\pi L}{D}\sqrt{E_e^C\left|2E_e - E_e^C\right|}. \tag{۱۲}$$

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

معادله (۱۲) نشان می دهد که آنتروپی افق کیهان حادث سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته با فرم خاصی از فرمول کاردی- ورلینده سازگار است به شرط آن که برای محاسبه جرم گرانشی از توصیف ابوت و دزر استفاده شود.

۳- ترمودینامیک در افق کیهان شناسی سیاهچاله

آنتروپی در افق کیهان شناسی سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته $(D+2)$-بعدی با رابطه زیر داده می شود

$$S_c = \frac{r_c^D V_D}{4G} = \frac{4\pi}{D\omega_D} r_c^D. \tag{۱۳}$$

با استفاده از توصیف ارائه شده توسط مینیک و همکارانش [۷] جرم گرانشی این سیاهچاله منفی بوده و با استفاده از $f(r_c)=0$ داریم

$$E_c = -M = \frac{r_c^{D-1}}{\omega_D}\left(\frac{r_c^2}{L^2}-1\right), \tag{۱٤}$$

و با استفاده از رابطه ترمودینامیکی $dE = TdS$ می توان نوشت

$$T_c = \frac{1}{4\pi r_c}\left[(D+1)\frac{r_c^2}{L^2}-(D-1)\right]. \tag{۱٥}$$

با استفاده از معادلات (۱۳)، (۱٤) و (۱٥) می توان نشان داد انرژی کازیمیر در افق کیهان شناسی این سیاهچاله عبارت است از

$$E_c^C = -\frac{2Dr_c^{D-1}}{16\pi G}V_D = -\frac{2}{\omega_D}r_c^{D-1}, \tag{۱٦}$$

انرژی کازیمیر منفی با این واقعیت که در همخوانی dS/CFT دوگان CFT یکتا نیست؛ سازگار است.

اکنون با استفاده از معادلات (۱٤) و (۱٦) داریم

$$2E_c - E_c^C = \frac{2Dr_c^{D+1}}{16\pi GL^2}V_D = \frac{2}{L^2\omega_D}r_c^{D+1}, \tag{۱۷}$$

و با استفاده از معادلات (١٦) و (١٧) می توان معادله (١٣) را به صورت زیر نوشت

$$S_c = \frac{2\pi L}{D}\sqrt{\left|E_c^C\right|(2E_c - E_c^C)}. \tag{۱۸}$$

معادله (١٨) نشان می دهد که آنتروپی افق کیهان شناسی سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته از نوع خاصی از فرمول کاردی- ورلینده پیروی می کند به شرط آن که برای محاسبه جرم گرانشی از توصیف مینیک و همکارانش استفاده شود.

٤- نتیجه گیری

فرمول کاردی- ورلینده از همخوانی AdS/CFT نتیجه شده و آنتروپی یک میدان متقارن همدیس $(D+1)$-بعدی را به انرژی کل و انرژی کازیمیر آن در یک فضای $(D+2)$-بعدی مرتبط می کند. در این مقاله پاسخ این پرسش بررسی شده است که آیا آنتروپی فضا- زمان هایی که مجانباً دوسیته هستند را نیز می توان بوسیله فرمول کاردی- ورلینده توصیف کرد؟ به عبارت دیگر آیا همخوانی dS/CFT وجود دارد؟ برای یافتن پاسخ این پرسش کمیت های ترمودینامیکی سیاهچاله شوارزشیلد- دوسیته در افق های حادث و کیهان شناسی این سیاهچاله به صورت جداگانه محاسبه شده اند. نتایج محاسبات انجام شده حاکی از آن است که چنانچه برای محاسبه جرم گرانشی، در افق حادث از توصیف ارائه شده توسط ابوت و دزر و در افق کیهان شناسی از توصیف ارائه شده توسط مینیک و همکارانش استفاده شود، آنتروپی به دست آمده بوسیله رابطه ای شبیه فرمول کاردی- ورلینده قابل توصیف بوده و این خود به نفع همخوانی dS/CFT نیز هست. با وجود این برای ارائه یک پاسخ قطعی و نهایی بررسی های دقیق تری لازم است.

۵- مرجع ها:

[1] Hawking S.W., Nature, 248(1974)30;

Hawking S.W., Commun. Math. Phys. 43(1975)199; 46(1976)206.

[2] Kraus P., Wilczek F., Nucl. Phys. B, 433(1995)403;

Kraus P., Wilczek F., Nucl. Phys. B, 437(1995)231;

Kraus P., Keski-Vakkuri E., Nucl. Phys. B, 491(1997)249;

Parikh M.K., Wilczek F., Phys. Rev. Lett.85(2000)5042;

Parikh M.K, Wilczek F., Phys. Lett. B, 546(2002)189,

Parikh M.K., Wilczek F., Int. J. Mod. Phys. D, 13(2004)2351;

Majhi B.R and Vagenas E.C., Phys. Lett. B 725 (2013) 477;

Gangopadhyay S., Dutta dy A., Saha A., Gen. Rel. Grav. 46 (2014) 1661.

[3] Farmany, A., Dehghani, M., Setare, M.R, Mortazavi, S.S. Phys. Lett. B, 682(2009)114:

Dehghani, M., Farmany, A. Phys. Lett. B, 675 (2009) 460;

Dehghani, M. Phys. Lett. A, 374 (2010)3012;

Han, X., Li, H., Ling, Y.: Phys. Lett. B, 666(2008) 121;

Shu, F.-W., Shen, Y.-G.: Phys. Lett. B, 661(2008)295;

Wang, F.J., Gui, Y.X., Ma, C.R.: Phys. Lett. B, 660(2008)144.

[4] Cardy J. L., Nucl. Phys. B, 270 (1986) 186.

[5] Verlinde E., “On the Holographic Principle in a Radiation Dominated Universe”, arXiv:hep-th/0008140.

[6] Abbott L.F, and Deser S. Nucl. Phys. B, 195(1982)76.

[7] Balasubramanian V. de Boer J. and Minic D., Phys. Rev. D, 65(2002) 123508.