مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

حل معادله شرودینگر با پتانسیل حل پذیر شبه دقیق متئو: روش بت آنساتز

مرضیه برادران[۱]؛ حسین پناهی[۲]

[۱و۲]گروه فیزیک، دانشکده علوم، دانشگاه گیلان

چکیده

در این مقاله، معادله شرودینگر برای پتانسیل حل پذیر شبه دقیق متئو که دهمین کلاس در طبقه بندی توربینر می باشد، مورد مطالعه قرار می گیرد. با استفاده از نظریه حل پذیری شبه دقیق، نمایش جبری هامیلتونین سیستم بر حسب مولدهای جبر لی $sl(2)$ بیان می گردد. در ادامه با یک پیشنهاد مناسب از تابع موج، به کمک معادلات بت آنساتز، ویژه مقادیر و ویژه توابع متناظر به صورت تحلیلی و دقیق محاسبه می گردد.

جستجو برای محاسبه حل دقیق معادلات موج، همواره از موضوعات بحث برانگیز فیزیکدانان از ابتدای پیدایش مکانیک کوانتومی بوده است. در سال های اخیر، استفاده از روش های ریاضی در فیزیک، بیشتر از گذشته ذهن فیزیکدانان را به خود معطوف کرده است. در سال های ابتدایی دهه ۸۰ میلادی، رده جدیدی از مسائل ویژه مقداری که حالت بینابین مسائل حل پذیر دقیق و مسائل غیر حل پذیر می باشند، مطرح شد [۱-۳]. در این دسته از مسائل، در شکل عملگری هامیلتونین سیستم، جبر نهفته ای وجود دارد که ما را مطمئن می سازد که بخشی از طیف ویژه مقادیر سیستم (و نه کل طیف) را می توان به کمک روش های تحلیلی و جبری، به صورت دقیق محاسبه کرد. چنین سیستم هایی را حل پذیر شبه دقیق[۱] (QES) می نامند. طبقه بندی جامع از معادلات و پتانسیل های QES در یک بعد، توسط توربینر[۲] در ده کلاس صورت گرفته است [۱]. ما در این کار، معادله شرودینگر را برای پتانسیل حل پذیر شبه دقیق کلاس X در طبقه بندی توربینر در نظر گرفته و با استفاده از معادلات بت آنساتز[۳] [٤]، جواب های دقیق سیستم را محاسبه می کنیم.

پتانسیل متئو و نظریه حل پذیری شبه دقیق

دهمین کلاس از دسته پتانسیل های QES طبقه بندی شده توسط توربینر، پتانسیل دوره ای مرتبط با پتانسیل متئو[٤] و به صورت زیر است [۱]:

$$V(x)=\sin^2(x)-(2n+1)\cos(x)+1. \qquad (۱)$$

معادله شرودینگر برای پتانسیل مذکور عبارت است از:

$$-\frac{d^2\psi(x)}{dx^2}+\left(\sin^2(x)-(2n+1)\cos(x)+1\right)\psi(x)=E\,\psi(x). \qquad (۲)$$

---

۱ *Quasi-exactly solvable*
۲ *Turbiner*
۳ *Bethe ansatz*
٤ *Mathieu*

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

بر اساس نظریه حل پذیری شبه دقیق، برای اینکه نشان دهیم معادله بالا، یک معادله دیفرانسیل QES است، کافیست آن را بر اساس ترکیب درجه دو از مولدهای جبر $sl(2)$ بیان کنیم. با استفاده از تابع موج پیشنهادی زیر:

$$\psi(x)=\sin(x)e^{\cos(x)}\phi(x), \tag{۳}$$

که رفتار مجانبی تابع موج را تضمین می کند و نیز با استفاده از تغییر متغیر $z=\cos(x)$، خواهیم داشت:

$$\left\{\left(z^2-1\right)\frac{d^2}{dz^2}+\left(2z^2+3z-2\right)\frac{d}{dz}+\left(2(1-n)z+2-E\right)\right\}\phi(z)=0. \tag{٤}$$

با انجام محاسبات لازم، معادله بالا، به صورت عنصری از جبر پوششی $sl(2)$ به شکل زیر به دست می آید:

$$H=J^{+}_{n-1}J^{-}_{n-1}-J^{-}_{n-1}J^{-}_{n-1}+2\left(J^{+}_{n-1}-J^{-}_{n-1}\right)+\left(n+2\right)J^{0}_{n-1}+\left(\frac{n^2+n+2}{2}\right), \tag{٥}$$

که در آن J^{+}_{n-1}، J^{0}_{n-1} و J^{-}_{n-1} مولدهای جبر لی $sl(2)$ و به صورت زیر می باشند:

$$J^{+}_{n-1}=z^2d_z-(n-1)z,\qquad J^{0}_{n-1}=zd_z-\frac{n-1}{2},\qquad J^{-}_{n-1}=d_z, \tag{٦}$$

که در آن $n=1,2,3,\ldots$. در مرجع [٥]، نتایج عددی حاصل از معادله جبری (٥) را محاسبه نموده ایم. در ادامه به روش تحلیلی و با استفاده از معادلات بت آنساتز، اقدام به حل معادله (٤) نموده و جواب های حاصل از دو روش را مقایسه می کنیم.

حل تحلیلی با استفاده از معادلات بت آنساتز

ویژه تابع $\phi_n(z)$ در رابطه (٤) را به صورت زیر در نظر می گیریم:

$$\phi_n(z)=\begin{cases}\prod_{i=2}^{n}(z-z_i) & n\neq 1,\\ 1 & n=1,\end{cases} \tag{٧}$$

که در آن z_i ، نقش گره تابع موج را بازی می کند. پس از انجام محاسبات لازم، خواهیم داشت:

$$\left(z^2-1\right)\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}+\left(2z^2+3z-2\right)\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{z-z_i}+2(2-n)z=E-2. \tag{٨}$$

چنان که مشاهده می شود، معادله بالا دارای قطب های ساده z_i است، بنابراین برای رفع تکینگی در $z=z_i$، با استفاده از حساب مانده ها[٥] خواهیم داشت:

$$E-2-\sum_{i=2}^{n}\frac{\mathrm{Res}(E-2)\big|_{z=z_i}}{z-z_i}=2\sum_{i=2}^{n}z_i+(n-1)(n-2)+3(n-1). \tag{٩}$$

حال به کمک اتحادهای زیر:

[٥] Residue

$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{1}{z-z_i}=0, \qquad \sum_{i=2}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{z_i^3}{z_i-z_j}=(n-2)\sum_{i=2}^{n}z_i^2+\sum_{i<j}^{n}z_i z_j,$$
$$\sum_{i=2}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{z_i^2}{z_i-z_j}=(n-2)\sum_{i=2}^{n}z_i, \qquad \sum_{i=2}^{n}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{z_i}{z_i-z_j}=\frac{(n-1)(n-2)}{2}, \tag{۱۰}$$

رابطه (۹) به صورت زیر تبدیل می یابد:

$$E-2=\sum_{i=2}^{n}\frac{z_i^2-1}{z-z_i}\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}-\sum_{i=2}^{n}\frac{2z_i^2+3z_i-2}{z-z_i}+2\sum_{i=2}^{n}z_i+(n-1)(n-2)+3(n-1). \tag{۱۱}$$

با توجه به ثوابت و متغیرها در دو طرف رابطه بالا، معادلات بت آنساتز، به صورت زیر به دست می آیند:

$$E_n-2=2\sum_{i=2}^{n}z_i+(n-1)(n-2)+3(n-1), \tag{۱۲}$$

$$\sum_{j\neq i}^{n}\frac{2}{z_i-z_j}+\frac{2z_i^2+3z_i-2}{z_i^2-1}=0. \tag{۱۳}$$

به این ترتیب، z_iها و در نتیجه ویژه مقادیر دقیق انرژی، از روابط بالا محاسبه می شوند. برای نشان دادن کارایی روش مذکور، جواب های حالت پایه و اولین حالت برانگیخته را محاسبه می کنیم. برای حالت پایه $n=1$، از روابط (۳) و (۱۲)، ویژه مقدار انرژی و ویژه تابع متناظر، عبارتند از:

$$\begin{cases} E_1=2, \\ \psi_1(x)=\sin(x)e^{\cos(x)}. \end{cases} \tag{۱۴}$$

برای اولین حالت برانگیخته $n=2$، به کمک روابط (۳) و (۱۲)، ویژه مقادیر و ویژه توابع متناظر، به صورت زیر به دست می آیند:

$$\begin{cases} E_2=2z_2+5, \\ \psi_2(x)=\sin(x)e^{\cos(x)}\left(\cos(x)-z_2\right), \end{cases} \tag{۱۵}$$

که مقادیرِ ریشه های z_2 از معادله بت آنساتز (۱۳)، عبارتند از $z_2=0.5,\ -2$. به این ترتیب، با ادامه روند مذکور، می توان ویژه مقادیر و ویژه توابع مراتب بالاتر را نیز محاسبه نمود. مقایسه نتایج عددی حاصل از روش بت آنساتز با نتایج عددی مرجع [۵]، در جدول ۱ نمایش داده شده است.

جدول ۱ : مقایسه نتایج عددی روش بت آنساتز و روش جبری در مرجع [۵]

n	E_{QES} [۵]	E_{BAM}
۱	۲	۲
۲	۱ ۶	۱ ۶
۳	-۰/۱۷۹ ۶ ۱۱/۱۷۹	-۰/۱۷۹ ۶ ۱۱/۱۷۹

نتیجه گیری

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

در این کار، به صورت مستقیم و با استفاده از محاسبات تحلیلی، به حل معادله شرودینگر برای پتانسیل حل پذیر شبه دقیق متئو که دهمین کلاس در طبقه بندی توربینر می باشد، پرداختیم. هامیلتونین سیستم را بر حسب مولدهای جبر لی $sl(2)$ بیان نمودیم که مبنای حل پذیری شبه دقیق مسئله مذکور است. در ادامه با یک پیشنهاد مناسب از تابع موج، به کمک معادلات بت آنساتز، ویژه مقادیر و ویژه توابع متناظر را به صورت دقیق محاسبه نمودیم. مشاهده شد که جواب های حاصل از این روش با سایر روش ها، در توافق کامل می باشند. به این ترتیب، چنین نتیجه می شود که می توان از روش بت آنساتز، به عنوان روشی کارآمد برای محاسبه جواب های دقیق بسیاری از مسائل فیزیکی استفاده کرد.

مرجع ها

[1]. A. V. Turbiner, *Contemp. Math* **160** 263 (1994).
[2]. A. V. Turbiner, *Commun. Math. Phys* **118** 467 (1988).
[3]. N. Kamran, P. Olver, *J. Math. Anal. Appl*. **145** 342 (1990).
[4]. Y. Z. Zhang, *J. Phys. A: Math and Theor* **45** 065206 (2012).
[5]. H. Panahi, M. Baradaran and S. R. Azizian, accepted in *Rom. Rep. Phys* (2015)