

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

شدت جفت‌شدگی حالت همگام پایدار در شبکه ای از نگاشت‌ها

فاطمه آقائی^۱؛ کیوان آقابابائی سامانی^۱

^۱ دانشکده‌ی فیزیک، دانشگاه صنعتی اصفهان، اصفهان، ۸۳۱۱۱-۸۴۱۵۶

چکیده

پایداری حالت همگام نگاشت‌هایی که در یک شبکه با هم جفت‌شده‌اند، به نوع و شدت جفت‌شدگی بستگی دارد. در این مطالعه ابتدا با استفاده از روش سنجه ماتریسی، تأثیر پارامترهای شبکه را بر بازه پایداری (بازه‌ای از شدت جفت‌شدگی که حالت همگام را پایدار نگه می‌دارد) بررسی می‌کنیم. سپس با نگرشی جدید به فرمول‌بندی روش تابع پایداری اصلی که برای تعیین وجود یا عدم پایداری همگام‌سازی ارائه شده است، بازه‌های پایداری را محاسبه، و علاوه بر بررسی نقش پارامترها بر بازه پایداری، نتایج آن را با روش سنجه ماتریسی مقایسه می‌کنیم. نتایج به دست آمده نشان می‌دهد، شبکه‌های متراکم‌تر بازه‌های پایداری بزرگتری دارند. همچنین اندازه شبکه، پارامتر دیگری است که بر بازه پایداری تأثیر به‌سزایی دارد؛ هر چه اندازه شبکه بزرگتر باشد، بازه پایداری کوچکتر است.

هنگامی که تعدادی سیستم دینامیکی در یک شبکه با هم جفت می‌شوند، بروز رفتارهای جمعی امکان پذیر خواهد شد. همگام‌سازی یکی از آشنا‌ترین رفتارهای جمعی است که به یکسان شدن آهنگ یا منطبق شدن دینامیک اجزای شبکه اطلاق می‌شود. پایداری حالت همگام در یک شبکه، به شدت و نوع جفت‌شدگی بستگی دارد [۱]. سنجه ماتریسی [۲] و تابع پایداری اصلی [۳، ۴]، دو روش برای بررسی پایداری همگام‌سازی هستند. سنجه ماتریسی، روشی برای تعیین مقادیری از شدت جفت‌شدگی است که همگام‌سازی را در آرایش مشخصی از نگاشت‌ها، پایدار نگه می‌دارد؛ در حالی که تابع پایداری اصلی تعیین می‌کند، همگام‌سازی یک نگاشت مشخص در چه شبکه‌هایی پایدار می‌ماند. در اینجا با استفاده از سنجه ماتریسی، تأثیر پارامترهای شبکه را بر مقادیر و اندازه‌ی بازه‌های پایداری شدت جفت‌شدگی بررسی می‌کنیم. سپس با نگاهی تازه به روش تابع پایداری اصلی، از آن برای تعیین بازه‌های پایداری شدت جفت‌شدگی شبکه‌هایی از نگاشت لجیستیک ($x(t+1) = rx(t)(1-x(t))$ و $r \in [0,4]$ و $x(t) \in [0,1]$) بهره می‌بریم [۵]. لازم به ذکر است در این مطالعه عبارت بازه‌ی پایداری شدت جفت‌شدگی یا بازه پایداری، $\Delta \mathcal{E}_s$ ، را برای نشان دادن بازه‌هایی از شدت جفت‌شدگی به کار می‌بریم که به ازای آنها حالت همگام پایدار خواهیم داشت.

سنجه ماتریسی [۲]: شبکه‌ای از نگاشت‌های جفت‌شده در نظر می‌گیریم:

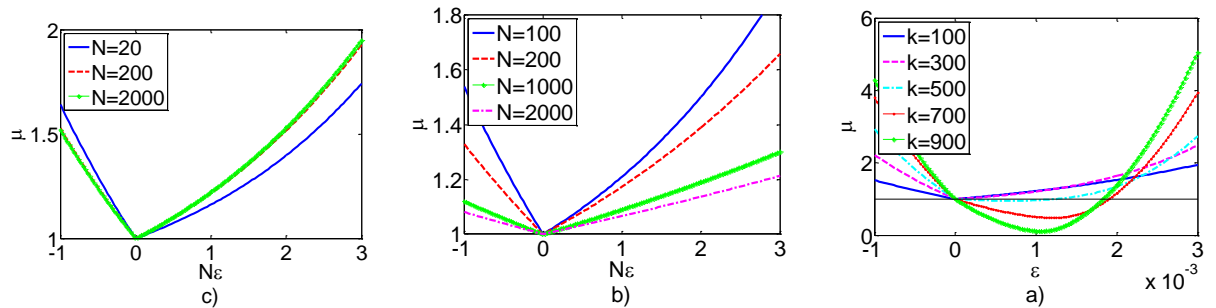
$$x_i(t+1) = f[x_i(t)] + \varepsilon \sum_{j=1}^N W_{ij} \{f[x_j(t)] - f[x_i(t)]\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

در این معادله $f[x(t)]$ ، معادله‌ی نگاشت منزوی W ، ماتریس جفت‌شدگی و ε شدت جفت‌شدگی را نشان می‌دهند. با تعریف ماتریس $S_w = -(w_{1,i+1} + \sum_{k \neq j+1} w_{i+1,k})$ ، $i = j$ ؛ $w_{i+1,j+1} - w_{1,j+1}$ ، $i \neq j$ می‌توان معادله (۱) را برای دینامیک یک اختلال کوچک از حالت همگام موضعی به شکل ماتریسی $\bar{\eta}(t+1) = f'[x(t)](I_{N-1} + \varepsilon S_w) \bar{\eta}(t)$ نوشت.

برای هر ماتریس مربعی دلخواه U می‌توان سه سنجه ماتریسی تعریف کرد: $\mu_\alpha(U)$ ، $\alpha = 1, 2, \infty$. اگر با استفاده از یک ماتریس مربعی M ، $U = M^{-T}(I + \varepsilon S_w)M^T M(I + \varepsilon S_w)M^{-1}$ را تعریف کنیم، می‌توان نشان داد در صورتی که $\mu_\alpha(U) \leq \Lambda = e^{-2\lambda_f}$ باشد، همگام‌سازی پایدار می‌ماند؛ در اینجا λ_f نمای لیاپانف تابع f است. ما این روش را برای شبکه‌های منظم، جهان کوچک، تصادفی و بی‌مقیاس به کار می‌بریم که همگی آنها متقارن هستند و $\mu_2 \leq \mu_1 = \mu_\infty$ ؛ از طرفی این روش شرط کافی را مشخص می‌کند، پس تنها $\mu \equiv \mu_2(u) = v_{\max}(u^H + u)/2$ را رسم می‌کنیم ($U_i(\cdot)$ ویژه مقادیر ماتریس).

شکل ۱: (a) اثر k بر μ در شبکه‌های با $N=1000$. (b) اثر N بر μ در شبکه‌های با $k=10$. (c) اثر N بر μ در شبکه‌های با $k/N=0.1$.



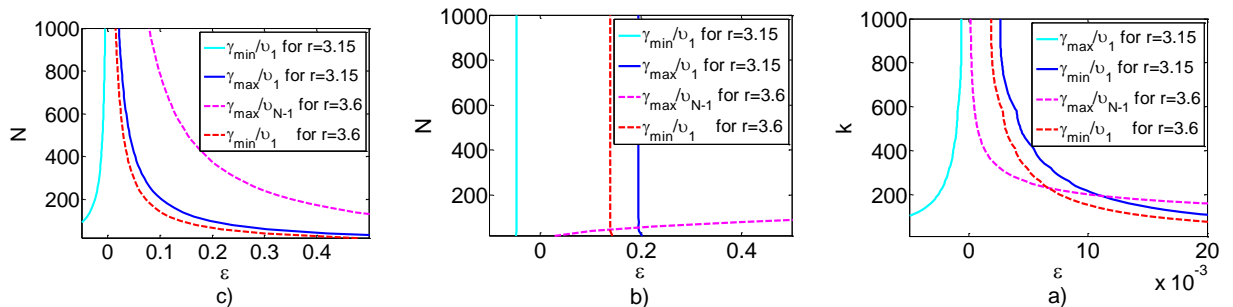
شبکه منظم [۷]: شکل ۱.a که در آن سنجه ماتریسی برای شبکه‌های منظم با تعداد رأس N ، یکسان و درجات k ، مختلف رسم شده است، نشان می‌دهد: (۱) اگر $\Lambda > 1$ باشد، $\varepsilon_{s_{\min}} \leq 0 \leq \varepsilon_{s_{\max}}$ ، و اگر $\Lambda < 1$ باشد، $\varepsilon_{s_{\min}} \leq 1/N \leq \varepsilon_{s_{\max}}$. (۲) اگر $\Lambda > 1$ ، همواره $\Delta \varepsilon_s$ وجود دارد، در صورتی که برای نگاشت‌های $\Lambda < 1$ ، هر چه Λ کوچکتر باشد، k باید بیشتر باشد تا یک $\Delta \varepsilon_s$ داشته باشد. (۳) هر چه Λ افزایش یابد، $\Delta \varepsilon_s$ نیز افزایش می‌یابد. در شکل ۱.b که N مختلف و k ثابت است، مشاهده می‌شود: اگر $\Lambda > 1$ ، $\varepsilon_{s_{\min}} \varepsilon_{s_{\max}} < 0$ ، و اگر $\Lambda < 1$ ، $\Delta \varepsilon_s \in \varepsilon \geq 0$. (۲) هر چه Λ بزرگتر باشد، $\Delta \varepsilon_s$ بزرگتر است. (۳) با افزایش N به ازای یک Λ ، $\Delta \varepsilon_s$ کاهش اما $N \Delta \varepsilon_s$ افزایش می‌یابد. در شکل ۱.c که k/N ثابت است، می‌بینیم: (۱) اگر $\Lambda > 1$ ، $\varepsilon_{s_{\min}} \varepsilon_{s_{\max}} < 0$. (۲) برای همه مقادیر Λ ، $\Delta \varepsilon_s$ با افزایش Λ ، افزایش می‌یابد. (۳) افزایش N ، $\Delta \varepsilon_s$ را کاهش می‌دهد.

نتایج ما نشان می‌دهد، اثر تغییرات میانگین تعداد درجات در شبکه جهان کوچک [۷]، پارامتر احتمال در شبکه تصادفی [۷]، و تعداد رأسهای هسته اولیه و رأسهای اضافه شده در شبکه بی‌مقیاس [۷] بر $\Delta \varepsilon_s$ ، مانند اثر k در شبکه منظم است. همچنین اثرات تغییر اندازه شبکه بر $\Delta \varepsilon_s$ در همه این شبکه‌ها یکسان و همانند شبکه منظم است.

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

تابع پایداری اصلی [۳، ۴]: معادله (۱) بر حسب ماتریس لاپلاسی شبکه، G ، به شکل $x_i(t+1) = f[x_i(t)] + \varepsilon \sum_{j=1}^N G_{ij} \{f[x_j(t)]\}$ در می‌آید. بنابراین معادلات یک اختلال کوچک حول خمینه همگام، $s(t)$ ، در در دستگامی که G قطری است، علاوه بر ε و $f[x(t)]$ به ویژه مقادیر ماتریس G ، u_i ها، نیز بستگی پیدا می‌کند: $\delta y_i(t+1) = (1 + \varepsilon u_i) f'[s(t)] \delta y_i(t)$. نمای لیاپانوفی که از این معادله به دست می‌آید، تابع پایداری اصلی، $\psi(\gamma)$ ، نام دارد. شرط لازم برای پایداری همگام‌سازی این است که $\psi(\gamma)$ به ازای تمام $\gamma_i \equiv \varepsilon u_i \neq 0$ منفی باشد. اگر ویژه مقادیر ماتریس G را به شکل $u_1 < u_2 < \dots < u_N = 0$ مرتب کنیم و فرض کنیم $\psi(\gamma)$ در بازه $(\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$ مقدار منفی داشته باشد، حالت همگام به ازای مقادیری از شدت جفت‌شدگی پایدار است که در بازه $\gamma_{\min}/u_i < \varepsilon < \gamma_{\max}/u_i$ قرار بگیرد. بنابراین بازه پایداری محل اشتراک $\gamma_{\min}/u_1 < \varepsilon < \gamma_{\max}/u_1$ و $\gamma_{\min}/u_{N-1} < \varepsilon < \gamma_{\max}/u_{N-1}$ است. در نگاشت لجیستیک برای $r = 3.15$ ، $\Lambda = 2.65 > 1$ و $\gamma_s \in (-2.301, 0.301)$ ؛ در چنین مواردی که $\gamma_{\min} < 0$ و $\gamma_{\max} \geq 0$ ، $\varepsilon_s \in (\gamma_{\max}/u_1, \gamma_{\min}/u_1)$ و برای $r = 3.6$ ، $\Lambda = 0.691 < 1$ و $\gamma_s \in (-1.866, -0.133)$ ؛ در این موارد که $\gamma_{\min}, \gamma_{\max} < 0$ ، $\varepsilon_s \in (\gamma_{\max}/u_{N-1}, \gamma_{\min}/u_1)$ ، در اینجا مقادیر مرتبط $\gamma_{\min}, \gamma_{\max}/u_1, u_{N-1}$ با هم رسم شده‌اند تا بازه پایداری را نشان دهند.

شکل ۲: $\gamma_{\max}/u_1, \gamma_{\min}/u_1$ به ازای $r = 3/15$ و $\gamma_{\max}/u_{N-1}, \gamma_{\min}/u_1$ به ازای $r = 3/6$. تأثیر k بر $\Delta \varepsilon_s$ برای شبکه‌های منظم با $N = 1000$. (b) تأثیر N بر $\Delta \varepsilon_s$ برای شبکه‌های منظم با $k = 10$. (c) تأثیر N بر $\Delta \varepsilon_s$ در شبکه‌های منظم با $k/N = 0/1$.



شبکه منظم: در شکل ۲.a $\Delta \varepsilon_s$ برای شبکه‌های منظم با k های مختلف به دست آمده است. این نمودار نشان می‌دهد: (۱) برای $r = 3.6$ ، $\varepsilon \in \Delta \varepsilon_s > 0$ است، در حالی که برای $r = 3.15$ ، $\varepsilon \in \Delta \varepsilon_s$ می‌تواند منفی هم باشد. (۲) برای نگاشت $r = 3.6$ در شبکه‌های تنگ هیچ $\Delta \varepsilon_s$ وجود ندارد، اما با افزایش تعداد k پایداری همگام‌سازی ممکن می‌شود و هر چه k بزرگتر باشد، $\Delta \varepsilon_s$ بیشتر می‌شود. همچنین افزایش k ، $\Delta \varepsilon_s$ را به سمت مقادیر کوچکتر ε جا به جا می‌کند. (۳) در شبکه‌های مترakمی از $r = 3.6$ ، افزایش k ، اثری بر $\Delta \varepsilon_s$ ندارد. (۴) برای همیشه $\Delta \varepsilon_s$ وجود دارد که در k کمتر، بزرگتر است. بنابر شکل ۲.b که k ثابت و N متغیر است: (۱) اگر $r = 3.6$ ، $\varepsilon \in \Delta \varepsilon_s > 0$ ، برای نگاشت $r = 3.6$ تنها در شبکه‌های کوچک $\Delta \varepsilon_s$ وجود دارد و هر چه شبکه کوچکتر باشد، $\Delta \varepsilon_s$ بزرگتر است. (۳) $\Delta \varepsilon_s$ مربوط به $r = 3.15$ ، مستقل از

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

N است. شکل ۲.C، که در آن k/N ثابت است، نشان می دهد: (۱) هیچ $\Delta\mathcal{E}_s$ برای نگاشت $r=3.6$ وجود ندارد. (۲) برای $r=3.15$ همواره یک $\Delta\mathcal{E}_s$ وجود دارد که افزایش اندازه شبکه، طول آن را کاهش می دهد. ما همین نتایج را برای شبکه‌های دیگر نیز به دست آوردیم.

نتیجه گیری: محاسبات ما نشان می دهد، روش تابع پایداری اصلی، نتایج حاصل از روش سنجه ماتریسی را تایید می کند. دیدیم نگاشت‌های با $\Lambda > 1$ و $\Lambda < 1$ رفتارهای متفاوتی در پایداری حالت همگام از خود نشان می دهند: $\Lambda > 1$ در همه‌ی شبکه‌ها دارای یک $\Delta\mathcal{E}_s$ هستند، اما $\Lambda < 1$ تنها در شبکه‌های متراکم همگام می شوند و $\Delta\mathcal{E}_s$ آن‌ها حول $\mathcal{E} = 1/N$ واقع می شود.

مرجع‌ها

۱. A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization*, Cambridge Univ. Press, (2001)
۲. P. Li, M. Chen, Y. Wu and J. Kurths, *Phys. Rev. E* **79**, 067102 (2009).
۳. L. Huang, Q. Chen, Y-C. Lia and L. M. Pecora, “Generic behavior of master-stability functions in coupled nonlinear dynamical systems”, *Phys. Rev. E* **80**, (2009)
۴. L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Master Stability Functions for synchronized Coupled Systems”, *Phys. Rev. Lett.* **80**, (1998).
۵. S. C. Mandrubia, A. S. Mikhailov and D. H. Zanette, *Emergence of Dynamical Order*, World Scienti_c, (2004).
۶. R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1985)
۷. S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.U. Hwang, *Phys. Rep.* **424**, 175 (2006).