مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

حل تحلیلی فضازمان متقارن کروی ایستا برای گرانش همدیس در سه بعد

الهام عبدی، رضا صفاری، صاحب سروش فر

گروه فیزیک، دانشگاه گیلان، رشت

چکیده

در این مقاله متریک متقارن کروی ایستا برای گرانش همدیس در سه بعد مورد بررسی قرار گرفته است. با استفاده از معادلات اویلر لاگرانژ ثابت های حرکت به دست آمده است و همچنین معادلات ژئودزیک را بر حسب تابع وایرشتراس حل می‌کنیم. با بررسی پتانسیل موثر و نمودارهای ژئودزیکی درباره وجود مدارهای مختلف می‌توان بحث کرد.

حل تحلیلی معادلات ژئودزیک

متریک متقارن کروی ایستا به شکل زیر می باشد. که درآن پارامتر های a و b و c ثابت هستند[۱]

$$ds^2 = -(ar^2 + br + c)dt^2 + (ar^2 + br + c)^{-1}dr^2 + r^2 d\varphi^2 \qquad (۱)$$

معادله ژئودزیک به صورت $\frac{d^2x^\mu}{ds^2} + \Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{ds}\frac{dx^\sigma}{ds}$ می‌باشد، در اینجا $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ ضریب کریستوفل است.

لاگرانژی یک ذره در فضا زمان به صورت زیر است

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu}\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \qquad (۲)$$

با استفاده از معادله اویلر-لاگرانژ پایستار های حرکت انرژی و تکانه زاویه ای در راستای φ به صورت زیر بدست می‌آیند

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{t}} = -(ar^2 + br + c)\dot{t} = -E\,,\ \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}} = r^2\dot{\varphi} = L \qquad (۳)$$

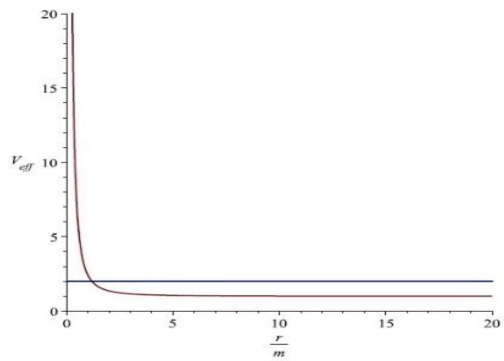
از معادلات (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم

$$\left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = E^2 - f(r)\left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) \qquad (٤)$$

$$\left(\frac{dr}{d\emptyset}\right)^2 = r^6\left(\frac{-\epsilon a}{L^2}\right) + r^5\left(-\frac{b\epsilon}{L^2}\right) + r^4\left(\frac{E^2}{L^2} - \frac{c\epsilon}{L^2} - a\right) - br^3 - cr^2 \qquad (٥)$$

اکنون با استفاده از معادله شماره(٤)پتانسیل موثر را به صورت زیر به دست می آوریم.

$$v_{eff} = (ar^2 + br + c)\left(\epsilon + \frac{L^2}{r^2}\right) \qquad (٦)$$



نمودار پتانسیل موثر بالا با مقادیر $a = 10^{-5}$ $b = 10^{-3}$ $c = 0.99$ $L = 0.7$ $E = \sqrt{2}$

برای بررسی بهتر وابستگی انواع ممکن مدارها به پارامترهای فضا زمان از کمیت‌های بدون بعد زیر استفاده می‌کنیم بنابراین رابطه‌ی (۱۲) به معادله زیر تبدیل می‌شود

$$\tilde{r} = \frac{r}{m} \text{ و } a = \frac{\tilde{a}}{m} \text{ و } \tilde{L} = \frac{m}{L} \text{ و } b = \frac{\tilde{b}}{m} \qquad (۷)$$

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\emptyset}\right)^2 = -\tilde{a}\epsilon\tilde{L}\tilde{r}^6 - \epsilon b\tilde{L}\tilde{r}^5 + \left(\left(E^2 - c\epsilon\right)\tilde{L} - a\right)\tilde{r}^4 - \tilde{b}\tilde{r}^3 - c\tilde{r}^2 \qquad (۸)$$

حل تحلیلی معادلات ژئودزیک نور گونه

برای $\varepsilon = 0$، معادله (۸) به یک معادله درجه ۳ به صورت زیر تبدیل می شود

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = 2u^3 - u^2 - \tilde{\beta}u + \left(E^2\mathcal{L} + \tilde{\Lambda}\right) = \sum_{i=0}^{3} a_i\, u^i = p_3(u). \qquad (۹)$$

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

با جایگزینی $u = (2y + \frac{1}{6})$، معادله (۹) به فرم معادله وایرشتراس تبدیل می شود

$$(\frac{dy}{d\varphi})^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 = p_3(y), \qquad (۱۰)$$

که در اینجا g_2 , g_3، ناورداهای وایرشتراس به صورت زیر می باشند

$$g_2 = \frac{1}{16}(\frac{4}{3}{b_2}^2 - 4b_1b_3) \ , \ g_3 = \frac{1}{16}(\frac{1}{3}b_1b_2b_3 - \frac{2}{27}{b_2}^3 - b_0{b_3}^2) \qquad (۱۱)$$

معادله دیفرانسیل (۱۰) از نوع بیضوی است و بر حسب توابع وایرشتراش حل شده است[۲]

$$y(\varphi) = \wp\,(\varphi - \varphi_{in}; g_2; g_3)\,, \qquad (۱۲)$$

که در آن $\varphi_0 = \frac{1}{4}(\frac{b_3}{\tilde{r}_0 - \tilde{r}_R} + \frac{b_2}{3})$, $\varphi_{in} = \varphi_0 + \int_{y_0}^{\infty}\frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}$. در نتیجه حل معادله (۸) به صورت زیر می باشد

$$\tilde{r}(\varphi) = \frac{b_3}{4\wp(\varphi - \varphi_{in}; g_2; g_3) - \frac{b_2}{3}} + \tilde{r}_R\,. \qquad (۱۳)$$

نتیجه گیری

در این مقاله با کمک متریک متقارن کروی معادلات حرکت ژئودزیک نورگونه را بدست آوردیم. همچنین با کمک توابع وایرشتراش توانستیم حل تحلیلی این معادلات را بدست آوریم.از روی نمودار پتانسیل و تعداد صفرهای چند جمله ای می‌توان مدارهای ممکن راترسیم نمود.

مراجع

[1] arXiv:0905.1510v1 [hep-th] 10 May 2009

[۲] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim and J. Zanelli, Phys. Rev. D 48, 1506 (1993)Centro

de Ingenier´ıa de la Innovaci´on del C1.[۳] S.Carlip,Quantum gravity in 2+1 dimensions, Cambridge University Press (1998).ECS1 University Press (1998).