

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴) حل تحلیلی معادله ژئودزیک فضا - زمان سیاهچاله GMGHS باردار الکتریکی

صاحب سروش فر، رضا صفاری، احسان سهامی

گروه فیزیک، دانشگاه گیلان، رشت

چکیده

در این مقاله حرکت ژئودزیک ذرات را در فضا- زمان اطراف سیاهچاله GMGHS باردار الکتریکی در نظر می‌گیریم. حل تحلیلی معادلات ژئودزیک این سیاهچاله را بر حسب توابع بیضوی و ایراشتراس، انجام می‌دهیم. سپس با استفاده از پتانسیل مؤثر ذره آزمون، برای طبقه‌بندی مسیر حرکت ذرات استفاده می‌کنیم.

معادلات ژئودزیک

برای این تحقیق، متریک GMGHS باردار الکتریکی را در نظر گرفته‌ایم که بوسیله گیبونس و مائدا [1] و سه سال بعد، بطور مستقل، توسط گارفینکل، هورویتس و استرومینگر [2] برای حل سیاهچاله باردار ایستا، در نظریه ریسمان انرژی پایین، پیدا شد. [3]. در چارچوب ریسمان، کنش GMGHS بوسیله رابطه زیر توصیف می‌شود

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} e^{-2\phi} (R + 4(\nabla\phi)^2 - F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})$$

که R معیار خمش، ϕ دیلاتون و $F_{\mu\nu}$ نیروی میدان ماکسول می‌باشد. که از طریق تبدیل منسجم $g_{\mu\nu}^S = e^{2\phi} g_{\mu\nu}^E$ با

کنش چارچوب آینشتاین مرتبط می‌باشد [4,5]. حل GMGHS باردار الکتریکی در چارچوب ریسمان، با متریک خطی زیر بیان می‌شود $ds^2 =$

$$-\frac{(1+\frac{Q^2-2M^2}{Mr})}{(1+\frac{Q^2}{Mr})^2} dt^2 + \frac{dr^2}{(1+\frac{Q^2-2M^2}{Mr})} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \quad (1) \quad [6]$$

که در آن M و Q به ترتیب جرم و بار می‌باشند. اگر فرض کنیم بار نداشته باشیم، متریک ما به متریک شوارتس شیلد تبدیل می‌شود. برای حل تحلیلی مربوط به معادلات این متریک، که اخیراً بیشتر مورد استفاده پژوهشگران قرار می‌گیرد [7,8]، معادله ژئودزیک را به شکل زیر داریم $\frac{d^2x^\mu}{ds^2} +$

$$\Gamma_{\rho\sigma}^\mu \frac{dx^\rho}{ds} \frac{dx^\sigma}{ds} = 0 \quad (2)$$

که در اینجا $ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ ، ویژه زمان در امتداد ژئودزی‌ها است و $\Gamma_{\rho\sigma}^\mu$ ضریب کریستوفل است.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = \frac{1}{2} \epsilon \quad (3)$$

لاگرانژی ذره برای متریک شماره (۱) بصورت زیر است

که برای ذرات، $\epsilon = 1$ و برای نور، $\epsilon = 0$ می‌باشد. برای لاگرانژی داریم

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[-\frac{(1+\frac{Q^2-2M^2}{Mr})}{(1+\frac{Q^2}{Mr})^2} \dot{t}^2 + \frac{\dot{r}^2}{(1+\frac{Q^2-2M^2}{Mr})} + r^2(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\phi}^2) \right] = \frac{1}{2} \epsilon \quad (4)$$

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

در مسأله، تقارون کروی داریم پس محاسباتمان را به صفحه استوایی محدود می‌کنیم ($\theta = \frac{\pi}{2}$ و $\dot{\theta} = 0$) پس رابطه تکانه زاویه‌ای بدین صورت

$$E = g_{tt} \frac{dt}{ds} = g_{tt} \dot{t} = - \frac{\left(1 + \frac{Q^2 - 2M^2}{Mr}\right) dt}{\left(1 + \frac{Q^2}{Mr}\right)^2 ds} \quad (5) \quad \text{می‌شود}$$

$$L = g_{\varphi\varphi} \frac{d\varphi}{ds} = g_{\varphi\varphi} \dot{\varphi} = r^2 \sin^2\theta \dot{\varphi} = r^2 \dot{\varphi} \quad (6)$$

$$\left(\frac{dr}{ds}\right)^2 = \left(1 + \frac{Q^2}{Mr}\right)^2 E^2 - \left(1 + \frac{Q^2 - 2M^2}{Mr}\right) \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) \quad (7) \quad \text{با استفاده از روابط (۳) تا (۶)، داریم}$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \left(\frac{E^2}{L^2} - \frac{\epsilon}{L^2}\right) r^4 + \left(\frac{2E^2 Q^2}{ML^2} - \frac{Q^2 \epsilon}{ML^2} + \frac{2M\epsilon}{L^2}\right) r^3 + \left(\frac{E^2 Q^4}{M^2 L^2} - 1\right) r^2 + \left(-\frac{Q^2}{M} + 2M\right) r \quad (8)$$

معادلات (7) و (8) توصیف کاملی از دینامیک را می‌دهند. از معادله (7) پتانسیل موثر بدست می‌آید

$$V_{eff} = \frac{\left(1 + \frac{Q^2 - 2M^2}{Mr}\right)}{\left(1 + \frac{Q^2}{Mr}\right)^2} \left(\frac{L^2}{r^2} + \epsilon\right) = E^2 \quad (9)$$

برای تجزیه و تحلیل راحت‌تر وابستگی انواع مدارها به پارامترهای فضا-زمان، از کمیت‌های بدون بعد استفاده می‌کنیم. با در نظر گرفتن کمیت‌های

$$\tilde{r} = \frac{r}{M}, \quad \tilde{Q} = \frac{Q}{M}, \quad \tilde{L} = \frac{M^2}{L^2} \quad (10) \quad \text{بدون بعد زیر برای رابطه (۸)، داریم}$$

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\varphi}\right)^2 = (E^2 - \epsilon) \tilde{L} \tilde{r}^4 + (2E^2 \tilde{Q}^2 - \tilde{Q}^2 \epsilon + 2\epsilon) \tilde{L} \tilde{r}^3 + (E^2 \tilde{Q}^4 \tilde{L} - 1) \tilde{r}^2 + (-\tilde{Q}^2 + 2) \tilde{r} = R(\tilde{r}) \quad (11)$$

حل تحلیلی معادله ژئودزیک

رابطه (11) یک چند جمله‌ای درجه چهار است $R(\tilde{r}) = \sum_{i=0}^4 a_i \tilde{r}^i$. با انتخاب متغیر جدید $\tilde{r} = \frac{1}{u} + \tilde{r}_R$ که \tilde{r}_R یکی از صفرهای $R(\tilde{r})$ است،

معادله (11) به شکل یک چند جمله‌ای درجه سه $R(u) = \sum_{i=0}^3 b_i u^i$ تبدیل و با جانشینی $u = \frac{1}{b_3} (4y - \frac{b_2}{3})$ که در آن $\tilde{r}_R = \frac{1}{b_3} \frac{d^{(4-j)} R}{d\tilde{r}^{(4-j)}}(\tilde{r}_R)$

است، به شکل وایراشتراس زیر تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)^2 = 4y^3 - g_2 y - g_3 = p_3(y) \quad (12)$$

ناوردهای وایراشتراس، یعنی g_2 و g_3 به شکل زیر می‌باشند

$$g_2 = \frac{1}{16} \left(\frac{4}{3} b_2^2 - 4b_1 b_3\right), \quad g_3 = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{3} b_1 b_2 b_3 - \frac{2}{27} b_2^3 - b_0 b_3^2\right) \quad (13)$$

رابطه (12)، معادله دیفرانسیل از نوع بیضوی است که بر حسب توابع وایراشتراس حل شده است [۹]

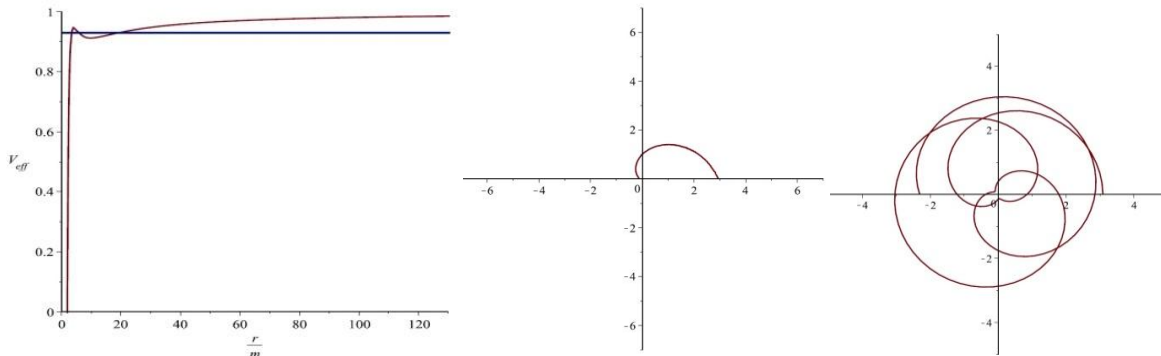
$$Y(\varphi) = \wp(\varphi - \varphi_{in}; g_2; g_3) \quad (14)$$

$$\varphi_{in} = \varphi_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - g_2 y - g_3}}, \quad \varphi_0 = \frac{1}{4} \left(\frac{b_3}{\tilde{r}_0 - \tilde{r}_R} + \frac{b_2}{3}\right) \quad \text{که در آن}$$

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

$$\tilde{r}(\varphi) = \frac{b_3}{4\phi(\varphi - \varphi_{in}; g_2; g_3) - \frac{b_2}{3}} + \tilde{r}_R \quad (15) \quad \text{پس از حل فوق بصورت زیر است}$$

برای نمونه، به ازای مقادیر انرژی و تکانه زاویه ای داده شده در پتانسیل شکل زیر، دو نوع مدار، امکان وجود دارند. (۱) مدار مقید کراندار، که ذره از جایی شروع به حرکت کرده و درون سیاهچاله می افتد. (۲) مدار مقید، که ذره برای همیشه بین دو مقدار $r_a < r_b$ در حال نوسان است.



نمودار ژئودزیک برای منطقه مقید (سمت راست) مقید کراندار (وسط). و نمودار پتانسیل موثر به ازای مقادیر $E = \sqrt{0.93}$, $L = 0.072$, $Q = 0.25$

نتیجه گیری

در این مقاله، حرکت ژئودزیک ذرات در فضا - زمان اطراف سیاهچاله GMGHS باردار الکتریکی را بررسی کردیم. با استفاده از معادله اوپلر - لاگرانژ، معادلات ژئودزیک را بدست آورده و بر حسب توابع بیضوی و ایراشتراس، بصورت تحلیلی حل کردیم. و براساس نمودار پتانسیل موثر، حرکت ذرات را تحلیل کردیم.

مرجع ها

- [1] Gibbons G. W. , Maeda K. – *Black holes and membranes in higher-dimensional theories with dilaton fields*, Nuclear Physics B298 (1988) 741-775.
- [2] Garfinkle T. , Horowitz G. A. , Strominger A. – *Charged black holes in string theory*, Physical Review D, 43, (1991), 3140-3143.
- [3] Cristina. Blaga, arXiv: 1407. 1504[gr-qc]
- [4] G. W. Gibbons and K. Maeda, Nucl. Phys. B 298, 741 (1988).
- [5] D. Garfinkle, G. T. Horowitz and A. Strominger, Phys. Rev. D 43, 3140(1991).
- [6] Yong-Wan Kim, Jaedong Choi, Young-Jai Park, Phys. Rev. D. 89. 044004(2014)[arXiv:1311. 0592[gr-qc]].
- [v] E. Hackmann, C. L'ammerzahl, V. Kagramanova and J. Kunz, Phys. Rev. D81, 044020 (2010)[arXiv:1009. 6117 [gr-qc]].
- [A] Saskia Grunau, Bhavesh Khamesra, Phys. Rev. D87, 124019 (2013)
- [9] M. Abramowitz and I. E. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications, New York, (1968).