مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

بررسی حرکت ژئودزیکی ذرات در فضازمان کرم‌چاله ریسمان کیهانی در خلاء

افسانه جعفری، رضا صفاری، صاحب سروش فر

گروه فیزیک دانشگاه گیلان، رشت

چکیده

در این مقاله معادلات ژئودزیک فضازمان کرم‌چاله‌ی ریسمان کیهانی در خلاء را بررسی می‌کنیم و سپس پتانسیل موثر را بدست می‌آوریم. در ادامه، با حل تحلیلی معادلات ژئودزیک بوسیله توابع بیضوی وایرشتراس در مورد مدارهای ممکن بحث می‌کنیم.

متریک و معادلات ژئودزیک

ریسمان‌های کیهانی در سال ۱۹۶۷ بوسیله کیبل معرفی شدند [۱]. یکی از ویژگی‌های جالب ریسمان‌های کیهانی این است که هندسه آن‌ها همه جا به‌جز تکینگی مخروطی در امتداد ریسمان تخت است. حرکت ژئودزیکی ذرات جرم دار و نورگونه برای برخی فضازمانهای ریسمان‌های کیهانی قبلا به صورت عددی بررسی شده‌اند [۲]. اما به حل‌های تحلیلی که اطلاعات کامل تری از این فضازمان ها در اختیار می‌گذارند کمتر پرداخته شده است. از این رو ما علاقه‌مند به حل‌های تحلیلی هستیم و به بررسی ژئودزیکی حرکت ذرات در فضازمان یک کرم‌چاله ریسمان کیهانی در خلاء می‌پردازیم. کلی‌ترین متریکی که می‌تواند به یک ریسمان کیهانی خلا نسبت داده شود در فرم کلی وایل [۳] به شکل زیر بیان می‌شود

$$ds^2=-(\frac{r}{r_0})^{2d(d-1)}dt^2+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2d(d-1)}dr^2+r^2{W_0}^2\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-2d}d\phi^2+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{2d}dz^2 \qquad (۱)$$

که r_0 و W_0 مثبت هستند و d ثابت است. با در نظر گرفتن $d=\frac{1}{2}$ معادله (۱) به فرم زیر تبدیل میشود

$$ds^2=-(\frac{r}{r_0})^{-1/2}dt^2+\left(\frac{r}{r_0}\right)^{-1/2}dr^2+rr_0{W_0}^2d\phi^2+\frac{r}{r_0}dz^2 \qquad (۲)$$

معادله ژئودزیک به این صورت داده می‌شود $\frac{d^2x^\mu}{d\lambda^2}+\Gamma^\mu_{\rho\sigma}\frac{dx^\rho}{d\lambda}\frac{dx^\sigma}{d\lambda}=0$ که در اینجا $d\lambda^2=g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$ ویژه زمان در طول ژئودزی هاست و $\Gamma^\mu_{\rho\sigma}$ ضریب کریستوفل در فضازمان متریک است. با داشتن لاگرانژی می‌توان معادلات ژئودزیک را بدست آورد. رابطه کلی لاگرانژی به صورت زیر است

$$L=\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=0}^{3}g_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu=\frac{1}{2}\epsilon\,,\ \mu,\nu=0,1,2,3\ \rightarrow\ (t,r,\phi,z)\ ,\epsilon=\begin{cases}0 & \text{نورگونه}\\ 1 & \text{جرم‌دار}\end{cases} \qquad (۳)$$

با استفاده از فرم کلی معادله اویلر–لاگرانژ کمیت‌های پایسته انرژی، تکانه در راستای Z و تکانه زاویه‌ای در راستای ϕ به صورت زیر بدست می‌آیند

$$P_{t=}\frac{\partial L}{\partial \dot{t}}=-\frac{{r_0}^{1/2}}{r^{1/2}}\dot{t}=-E\ ,\ P_\phi=\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}=\mathrm{rr_0 {W_0}^2}\dot{\phi}=\mathcal{L}\ ,\ P_z=\frac{\partial L}{\partial \dot{z}}=\frac{r}{r_0}\dot{z}=J \qquad (٤)$$

با استفاده از روابط (۳) و (٤) معادلات ژئودزیک را می‌توان به صورت زیر به دست آورد

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2=\frac{E^2r}{r_0}-\frac{J^2{r_0}^{1/2}}{r^{1/2}}-\frac{\mathcal{L}^2}{{W_0}^2{r_0}^{\frac{3}{2}}r^{\frac{1}{2}}}-\epsilon\frac{r^{1/2}}{{r_0}^{1/2}} \qquad (۵)$$

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2=r^{\frac{5}{2}}\left(-\frac{\epsilon}{\mathcal{L}^2}{W_0}^4{r_0}^{\frac{3}{2}}\right)+r^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{J^2}{\mathcal{L}^2}{r_0}^{\frac{5}{2}}{W_0}^4-{W_0}^2{r_0}^{1/2}\right)+r^3\left(\frac{E^2}{\mathcal{L}^2}{W_0}^4r_0\right) \qquad (٦)$$

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2=1-\frac{J^2{r_0}^{3/2}}{E^2r^{3/2}}-\frac{\mathcal{L}^2}{E^2{W_0}^2r^{3/2}{r_0}^{1/2}}-\frac{\epsilon{r_0}^{1/2}}{E^2r^{1/2}} \qquad (۷)$$

شکل یک مدار به مقدار انرژی، تکانه زاویه‌ای در راستای ϕ وتکانه در راستای z وابسته است. به دلیل اینکه r باید حقیقی و مثبت باشد تا مناطق فیزیکی قابل قبول را پیدا کنیم، باید $E^2\geq V_{eff}$ باشد. با معرفی کمیت‌های بدون بعد $\tilde{r}=\frac{r}{m}$, $\tilde{r_0}=\frac{r}{m}$, $\mathcal{L}^2=\frac{m^2}{\tilde{\mathcal{L}}}$ معادله (٦) به فرم (۸) تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{d\tilde{r}}{d\phi}\right)^2=\tilde{r}^{\frac{5}{2}}\left(-\epsilon\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^4{\tilde{r}_0}^{\frac{3}{2}}\right)+\tilde{r}^{\frac{3}{2}}\left(-J^2\tilde{\mathcal{L}}{\tilde{r}_0}^{\frac{5}{2}}{W_0}^4-{W_0}^2{\tilde{r}_0}^{\frac{1}{2}}\right)+\tilde{r}^3\left(E^2\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^4\tilde{r}_0\right) \qquad (۸)$$

اکنون برای ساده سازی یک تغییر متغیر می‌دهیم به صورت $d\tilde{r}=2rdr$, $\tilde{r}=r^2$ پس معادله (۸) به فرم زیر تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{dr}{d\phi}\right)^2=\frac{1}{4}\left[r^3\left(-\epsilon\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^4{\tilde{r}_0}^{\frac{3}{2}}\right)+r\left(-J^2\tilde{\mathcal{L}}{\tilde{r}_0}^{\frac{5}{2}}{W_0}^4-{W_0}^2{\tilde{r}_0}^{\frac{1}{2}}\right)+r^4\left(E^2\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^4\tilde{r}_0\right)\right]=\sum_{i=0}^4a_ir^i \qquad (۹)$$

پتانسیل موثر بی بعد شده نیز با توجه به معادله (۵) به این صورت به دست می‌آید

$$V_{eff}=\frac{J^2{\tilde{r}_0}^{3/2}}{\tilde{r}^3}+\frac{1}{\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^2\tilde{r}^3{\tilde{r}_0}^{1/2}}+\frac{\epsilon{\tilde{r}_0}^{1/2}}{\tilde{r}} \qquad (۱۰)$$

چون معادله (۹) درجه ٤ است بار دیگر با تغییر متغیر $r=\frac{1}{u}$ به صورت زیر تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{du}{d\phi}\right)^2=\frac{1}{4}\left[u^3\left(-J^2\tilde{\mathcal{L}}{\tilde{r}_0}^{\frac{5}{2}}{W_0}^4-{W_0}^2{\tilde{r}_0}^{\frac{1}{2}}\right)+u\left(-\epsilon\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^4{\tilde{r}_0}^{\frac{3}{2}}\right)+E^2\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^4\tilde{r}_0\right]=\sum_{i=0}^3b_iu^i \qquad (۱۱)$$

اکنون این چندجمله‌ای درجه ۳ با جانشینی $u=\frac{-16\,y}{J^2\tilde{\mathcal{L}}{\tilde{r}_0}^{\frac{5}{2}}{W_0}^4+{W_0}^2{\tilde{r}_0}^{1/2}}$ به فرم وایرشتراس زیر تبدیل می‌شود

$$\left(\frac{dy}{d\phi}\right)^2=4y^3-n_2y-n_3=P_3(y) \qquad (۱۲)$$

n_2 و n_3 هم ثابت‌های وایرشتراس هستند که به این صورت بدست می‌آیند

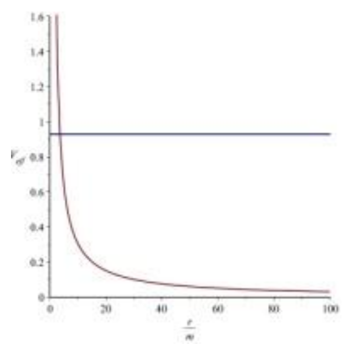
$$n_2=\frac{\epsilon\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^4{\tilde{r}_0}^{\frac{3}{2}}\left(-J^2\tilde{\mathcal{L}}{\tilde{r}_0}^{\frac{5}{2}}{W_0}^4-{W_0}^2{\tilde{r}_0}^{\frac{1}{2}}\right)}{64},\ n_3=-\frac{E^2\tilde{\mathcal{L}}{W_0}^4\tilde{r}_0\left(-J^2\tilde{\mathcal{L}}{\tilde{r}_0}^{\frac{5}{2}}{W_0}^4-{W_0}^2{\tilde{r}_0}^{\frac{1}{2}}\right)^2}{1024} \qquad (۱۳)$$

مقاله نامه بیست و دومین کنفرانس بهاره فیزیک (۳۱-۳۰ اردیبهشت ۱۳۹۴)

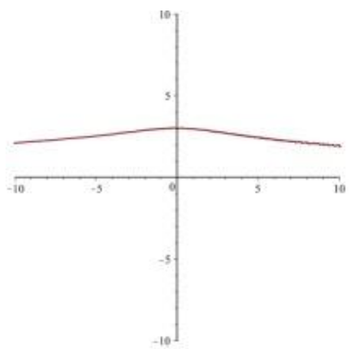
معادله دیفرانسیل (۱۲) از نوع بیضی‌گون است و برحسب توابع وایرشتراس به شکل $y(\phi) = \wp(\phi - \phi_{in}; n_2; n_3)$ حل شده است [٤و٥]. در نتیجه حل معادله (۹) به صورت زیر می‌شود

$$r(\varphi) = \frac{-J^2 \tilde{\mathcal{L}} \tilde{r}_0^{\frac{5}{2}} {W_0}^4 - {W_0}^2 \tilde{r}_0^{\frac{1}{2}}}{16\wp(\varphi - \varphi_{in}; g_2; g_3)} \qquad (١٤)$$

که در آن $\varphi_{in} = \varphi_0 + \int_{y_0}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{4y^3 - n_2 y - n_3}}$ و $\varphi_0 = \frac{-J^2 \tilde{\mathcal{L}} \tilde{r}_0^{\frac{5}{2}} {W_0}^4 - {W_0}^2 \tilde{r}_0^{\frac{1}{2}}}{16\ \mathrm{r}_0}$. با داشتن حل تحلیلی می‌توانیم نمودارهای ممکن را رسم کنیم. همچنین شرط لازم برای وجود ژئودزی این است که $R(\mathrm{r}) \geq 0$ و با بدست آوردن صفرهای حقیقی و مثبت $R(\mathrm{r})$ شکل مدار ممکن را مشخص می‌کنیم. با توجه به شکل‌ها (۱ و ۲) چون تنها یک صفر حقیقی و مثبت داریم، پس یک مدار آزاد منحرف شده وجود دارد. به نظر می‌رسد که ذره به کرم‌چاله ریسمان کیهانی نزدیک و منحرف شده است.



شکل ۱: پتانسیل موثر حرکت ژئودزیکی ذرات



شکل ۲: حرکت ژئودزیکی در دو بعد (به ازای $J = 0.05$, $\mathcal{L} = 0.072$)

نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن فضا زمان یک کرم‌چاله ریسمان کیهانی خلاء، به کمک معادله اویلر ـ لاگرانژ ثابت‌های حرکتی را بدست آورده و معادلات ژئودزیکی را بر حسب تابع بیضوی وایرشتراس به صورت تحلیلی حل نمودیم. در ادامه برای نمونه، مسیر حرکتی یک ذره که توسط این فضازمان دچار انحراف می‌شود را ترسیم نمودیم. نتایج حاصل از این مقاله می‌تواند ابزار خوبی برای پیش‌بینی و محاسبه مدارها (مثل انحراف نور) باشند.

مرجع‌ها

[١] Maarten van de Meent *Phys. Rev*. D **87**, 025020 (2013).
[٢] B. Hartmann and P. Sirimachan, *JHEP* **1008**:110,(2010).
[٣] Ernesto F. Eiroa and Claudio Simeone, *Phys.Rev*. D**70** (2004) 044008.
[٤] E. Hackmann and C. Lämmerzahl, *Phys. Rev. D* **78**, 024035 (2008)
[٥] M. Abramowitz and I. E. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover Publications,New York,(1968).